Capítulo 4

Números de Fibonacci

4.1 O exercício de Fibonacci

No século XIII, o matemático italiano Leonardo Fibonacci estudou a seguinte questão (não tão realística):

Leonardo Fibonacci

Um fazendeiro cria coelhos. Cada coelho dá origem a um coelho quando ele completa 2 meses de idade, e daí em diante a um coelho a cada mês. Os coelhos nunca morrem, e ignoramos os machos. Quantos coelhos terá o fazendeiro no n-ésimo mês, se ele começar com um coelho recém-nascido?

É fácil adivinhar a resposta para valores pequenos de n. O fazendeiro tem 1 coelho no primeiro mês e 1 coelho no segundo mês, pois o coelho tem que ter 2 meses de idade antes de começar a reproduzir. Ele tem 2 coelhos durante o terceiro mês, e 3 coelhos durante o quarto, pois seu primeiro coelho pariu um novo após o segundo e um após o terceiro. Após 4 meses, o segundo coelho também dá a luz a um novo coelho, portanto dois novos coelhos são adicionados. Isso significa que o fazendeiro terá 5 coelhos durante o quinto mês.

É fácil seguir a multiplicação de coelhos por um número qualquer de meses, se observarmos que o número de novos coelhos adicionados a cada mês é exatamente o mesmo que o número de coelhos que têm pelo menos 2 meses de idade, i.e., que já estavam lá no mês anterior. Em outras palavras, para obter o número de coelhos no mês *seguinte*, temos que adicionar o número de coelhos no mês *anterior* ao número de coelhos no mês *corrente*. Isso torna fácil calcular os números um por um:

$$1,\ 1,\ 1+1=2,\ 2+1=3,\ 3+2=5,\ 5+3=8,\ 8+5=13,\ \ldots$$

(É um tanto provável que Fibonacci não chegou a sua questão como um problema real de matemática aplicada; ele brincava com números, observava que esse procedimento dá números que eram novidade para ele mas que não obstante tinham propriedades muito interessantes—como verificaremos nós mesmos—, e então tentou pensar numa "aplicação".)

Para escrever isso como uma fórmula, vamos representar por F_n o número de coelhos durante o n-ésimo mês. Então temos, para $n = 2, 3, 4, \ldots$,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \tag{4.1}$$

Sabemos também que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$. É conveniente definir $F_0 = 0$; então a equação (4.1) permanecerá válida para $n = 1$ também. Usando a equação (4.1), podemos facilmente determinar qualquer número de termos nessa seqüência de números:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597\ldots$$

Os números nessa seqüência são chamados *números de Fibonacci*.

Vemos que a equação (4.1), juntamente com os valores especiais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, determina univocamente os números de Fibonacci. Por conseguinte podemos considerar (4.1), juntamente com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, como a definição desses números. Essa pode soar como uma uma definição incomum: ao invés de dizer o que F_n é (digamos, por meio de uma fórmula), simplesmente damos uma regra que computa cada número de Fibonacci a partir de dois números anteriores, e especifica os primeiros dois valores. Tal definição é chamada de *recorrência*. É um tanto semelhante em espírito à indução (exceto que ela não é uma técnica de prova, mas um método de definição), e é às vezes também chamada de *definição por indução*.

4.1 Por que temos que especificar exatamente dois dos elementos para começar? Por que não um ou três?

Antes de tentar dizer mais sobre esses números, vamos considerar um outro problema de contagem:

Uma escadaria tem n degraus. Você sobe tomando um ou dois a cada vez. De quantas maneiras você pode subir?

Para $n = 1$, existe apenas 1 maneira. Para $n = 2$, você tem 2 escolhas: tome um degrau duas vezes ou dois degraus de uma vez só. Para $n = 3$, você tem 3 escolhas: três degraus simples, ou um simples seguido de um duplo, ou um duplo seguido de um simples.

Agora pare e tente adivinhar qual é a resposta em geral! Se você adivinhou que o número de maneiras de subir numa escada com n degraus é n, você errou. O próximo caso, $n = 4$, dá 5 possibilidades ($1+1+1+1$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $2+2$).

Portanto, ao invés de adivinhar, vamos tentar a seguinte estratégia. Representamos por J_n a resposta, e tentamos adivinhar o que é J_{n+1}, supondo que sabemos o valor de

J_k para $k \leq n$. Se começarmos com um degrau simples, temos J_n maneiras de subir os n degraus remanescentes. Se começarmos com um degrau duplo, temos J_{n-1} maneiras de subir os $n-1$ degraus remanescentes. Agora essas são todas as possibilidades, e portanto

$$J_{n+1} = J_n + J_{n-1}.$$

Essa equação é a mesma que a equação que usamos para calcular os números de Fibonacci F_n. Isso significa que $F_n = J_n$? É claro que não, como podemos verificar olhando para os valores iniciais: por exemplo, $F_3 = 2$ mas $J_3 = 3$. Entretanto, é fácil notar que tudo o que acontece é que os J_n são deslocados de um:

$$J_n = F_{n+1}.$$

Isso é válido para $n = 1, 2$, e aí, é claro, é válido para todo n visto que as seqüências $F_2, F_3, F_4 \ldots$ e $J_1, J_2, J_3, \ldots$ são calculadas pela mesma regra a partir de seus dois primeiros elementos.

4.2 Temos n dólares para gastar. Todo dia compramos um doce por 1 dólar, ou um sorvete por 2 dólares. De quantas maneiras podemos gastar o dinheiro?

4.3 Quantos subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ não contêm dois inteiros consecutivos?

4.2 Muitas identidades

Existem muitas relações interessantes que são válidas para os números de Fibonacci. Por exemplo, qual é a soma dos n primeiros números de Fibonacci? Temos

$$\begin{aligned}
0 &= 0, \\
0+1 &= 1, \\
0+1+1 &= 2, \\
0+1+1+2 &= 4, \\
0+1+1+2+3 &= 7, \\
0+1+1+2+3+5 &= 12, \\
0+1+1+2+3+5+8 &= 20, \\
0+1+1+2+3+5+8+13 &= 33.
\end{aligned}$$

Começando por esses números por enquanto, não é difícil reconhecer que adicionando-se 1 ao lado direito obtemos os números de Fibonacci; na realidade, obtemos os números de Fibonacci dois passos após o último somando. Colocando isso numa fórmula:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

É claro que nesse ponto isso é apenas uma *conjectura*, um enunciado matemático não provado que acreditamos ser verdadeiro. Para prová-lo, usamos indução sobre n (como os números de Fibonacci são definidos por recorrência, a indução é o método natural e frequentemente único de prova de que dispomos).

Já verificamos a validade do enunciado para $n = 0$ e 1. Suponha que sabemos que a identidade se verifica para a soma dos $n-1$ primeiros números de Fibonacci. Considere a soma dos n primeiros números de Fibonacci:

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = (F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}) + F_n = (F_{n+1} - 1) + F_n,$$

pela hipótese da indução. Mas agora podemos usar a equação de recorrência para os números de Fibonacci, para obter

$$(F_{n+1} - 1) + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Isso completa a prova por indução.

4.4 Prove que F_{3n} é par.

4.5 Prove que F_{5n} é divisível por 5.

4.6 Prove as seguintes identidades.
(a) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
(b) $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \ldots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.
(c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.
(d) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

4.7 Desejamos estender os números de Fibonacci numbers na outra direção, i.e., queremos definir F_n para valores negativos de n. Desejamos fazer isso de modo que a recorrência básica (4.1) permaneça válida. Assim, de $F_{-1} + F_0 = F_1$ obtemos $F_{-1} = 1$; então, de $F_{-2} + F_{-1} = F_0$ obtemos $F_{-2} = -1$, etc. Como estão esses "números de Fibonacci com índices negativos" relacionados àqueles com índices positivos? Encontre vários valores, conjecture e então prove sua resposta.

Agora enunciamos uma identidade um pouco mais difícil:

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}. \tag{4.2}$$

É fácil verificar isso para muitos valores de n, e podemos ser convincidos de que ela é verdadeira, mas para prová-la é um pouco mais difícil. Por que essa é mais difícil que as identidades anteriores? Porque se desejamos prová-la por indução (não temos mesmo outros meios nesse ponto), então no lado direito temos apenas números de Fibonacci alternados (i.e., um sim, outro não), e portanto não sabemos como aplicar a recursão aí.

Uma maneira de consertar isso é encontrar uma fórmula semelhante para F_{2n}, e provar ambas por indução. Com alguma sorte (ou profunda intuição?) você pode conjecturar o seguinte:

$$F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}. \tag{4.3}$$

Novamente, é fácil verificar que isso se verifica para muitos valores pequenos de n. Para provar (4.3), vamos usar a recorrência básica (4.1) duas vezes:

$$F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = (F_n + F_{n-1})F_n + (F_{n-1} + F_{n-2})F_{n-1}$$

$$= (F_n^2 + F_{n-1}^2) + (F_nF_{n-1} + F_{n-1}F_{n-2})$$

(aplique (4.2) ao primeiro termo e indução ao segundo termo)

$$= F_{2n-1} + F_{2n-2} = F_{2n}.$$

A prova de (4.2) é semelhante:

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = (F_{n-1} + F_{n-2})^2 + F_{n-1}^2 = (F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2) + 2F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-1}^2$$

$$= (F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2) + F_{n-1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n-1}F_{n-2}$$

$$= (F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2) + F_nF_{n-1} + F_{n-1}F_{n-2}$$

(aplique indução ao primeiro termo e (4.3) ao segundo termo)

$$= F_{2n-3} + F_{2n-2} = F_{2n-1}.$$

Espere um minuto! Que tipo de truque é esse? Usamos (4.3) na prova de (4.2), e então (4.2) na prova de (4.3)? Relaxe, o argumento está OK: é somente que as duas provas por indução têm que andar simultaneamente. Se sabemos que ambas (4.3) e (4.2) são verdadeiras para um certo valor de n, então provamos (4.2) para o valor seguinte (se você olhar para a prova, você pode ver que ela usa apenas valores menores de n), e aí usamos isso e a hipótese da indução novamente para provar (4.3).

Esse truque é chamado *indução simultânea*, e é um método útil de tornar a indução mais poderosa.

4.8 Prove que a seguinte recorrência pode ser usada para calcular números de Fibonacci de índice ímpar, sem calcular aqueles de índice par:

$$F_{2n+1} = 3F_{2n-1} - F_{2n-3}.$$

Use essa identidade para provar (4.2) sem o truque da indução simultânea. Dê uma prova semelhante de (4.3).

4.9 Marque a primeira entrada de qualquer linha do triângulo de Pascal (essa é um 1). Mova um passo a Leste e um passo a Nordeste, e marque a entrada aí. Repita isso até que você saia do triângulo. Calcule a soma das entradas que você marcou.

(a) Que números você obtém se você começar de linhas diferentes? Primeiro "conjecture", e então prove sua resposta.

(b) Formule esse fato como uma identidade envolvendo coeficientes binomiais.

Suponha que o fazendeiro de Fibonacci começa com A coelhos recém-nascidos. No final do primeiro mês (quando não há aumento natural da população ainda), ele compra $B - A$ coelhos recém-nascidos de modo que ele tem B coelhos. Daí em diante, os coelhos começam a se multiplicar, e portanto ele tem $A + B$ coelhos após o segundo mês, $A + 2B$ coelhos após o terceiro mês, etc. Quantos coelhos ele terá após o n-ésimo mês? Matematicamente, definimos uma seqüência $E_0, E_1, E_2 \ldots$ por $E_0 = A$, $E_1 = B$, e a partir daí, $E_{n+1} = E_n + E_{n-1}$ (os coelhos se multiplicam pela mesma regra da biologia, só que os números iniciais são diferentes).

Para todo par de números A e B, temos essa “seqüência modificada de Fibonacci”. Quão diferentes elas são da seqüência de Fibonacci real? Temos que estudá-las separadamente para toda escolha de A e B?

Acontece que números E_n podem ser expressos um tanto facilmente em termos dos números de Fibonacci F_n. Para ver isso, vamos calcular uns poucos valores iniciais da seqüência E_n (é claro que o resultado conterá os valores iniciais A e B como parâmetros).

$$E_0 = A, \;\; E_1 = B, \;\; E_2 = A + B, \;\; E_3 = B + (A + B) = A + 2B,$$

$$E_4 = (A+B) + (A+2B) = 2A + 3B, \;\; E_5 = (A+2B) + (2A+3B) = 3A + 5B,$$

$$E_6 = (2A + 3B) + (3A + 5B) = 5A + 8B,$$

$$E_7 = (3A + 5B) + (5A + 8B) = 8A + 13B, \ldots$$

É fácil reconhecer o que está acontecendo: cada E_n é a soma de um múltiplo de A e um múltiplo de B, e os coeficientes são números de Fibonacci ordinários! Em uma fórmula, podemos conjecturar

$$E_n = F_{n-1}A + F_nB. \tag{4.4}$$

É claro que não provamos essa fórmula; mas uma vez que a escrevemos, sua prova é tão fácil (por indução sobre n, é claro), que a deixamos ao leitor como exercício 4.22.

Há um importante caso especial dessa identidade: podemos começar com dois números de Fibonacci consecutivos $A = F_a$ e $B = F_{a+1}$. Então a seqüência E_n é justamente a seqüência de Fibonacci, porém deslocada para a esquerda. Daí obtemos a seguinte identidade:

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b. \tag{4.5}$$

Essa é uma identidade poderosa para os números de Fibonacci, que pode ser usada para derivar muitas outras; algumas aplicações seguem como exercícios.

4.10 Dê uma prova de (4.2) e (4.3), baseada em (4.5).

4.11 Use (4.5) para provar a seguinte generalização dos exercícios 4.4 e 4.5: se n é um múltiplo de k, então F_n é um múltiplo de F_k.

4.12 Corte um tabuleiro de xadrez em 4 pedaços como mostrado na Figura 4.1 e monte retângulo de 5×13 a partir deles. Isso prova que $5 \cdot 13 = 8^2$? Onde estamos trapaceando? O que é que isso tem a ver com os números de Fibonacci?

4.3 Uma fórmula para os números de Fibonacci

Quão grande são os números de Fibonacci? Existe uma fórmula simples que expressa F_n como uma função de n?

Uma saída fácil, pelo menos para o autor de um livro, é enunciar a resposta imediatamente:

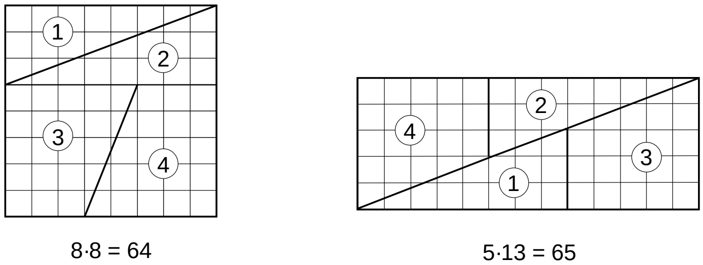

Figura 4.1: Prova de $64 = 65$

Teorema 4.3.1 *Os números de Fibonacci são dados pela fórmula*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Prova. É imediato verificar que essa fórmula dá o valor correto para $n = 0, 1$, e então pode-se provar sua validade para todo n por indução. □

4.13 Prove o Teorema 4.3.1 por indução sobre n.

Você se sente enganado por essa prova? Você deveria; enquanto está (é claro) logicamente correto o que fizemos, gostaríamos de ver mais: como se pode chegar a tal fórmula? Que deveríamos tentar se encontrássemos uma recorrência semelhante, porém diferente?

Portanto vamos esquecer o Teorema 4.3.1 por um momento e vamos tentar encontrar uma fórmula para F_n "a partir do nada".

Uma coisa que podemos tentar é experimentar. Os números de Fibonacci crescem um tanto rapidamente; quão rapidamente? Vamos pegar nossa calculadora e calcular a proporção entre númerod de Fibonacci consecutivos:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1,666666667, \quad \frac{8}{5} = 1,600000000,$$

$$\frac{13}{8} = 1,625000000, \quad \frac{21}{13} = 1,615384615, \quad \frac{34}{21} = 1,619047619,$$

$$\frac{55}{34} = 1,617647059, \quad \frac{89}{55} = 1,618181818, \quad \frac{144}{89} = 1,617977528,$$

$$\frac{233}{144} = 1,618055556, \quad \frac{377}{233} = 1,618025751.$$

Parece que a proporção entre números de Fibonacci consecutivos é muito próxima a $1,618$, pelo menos se ignorarmos os primeiros poucos valores. Isso suggere que os números de Fibonacci se comportam como uma progressão geométrica. Portanto vamos ver se existe alguma progressão que satisfaça a mesma recorrência que os números de Fibonacci. Seja $G_n = c \cdot q^n$ uma progressão geométrica ($c, q \neq 0$). Então

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

traduz para

$$c \cdot q^{n+1} = c \cdot q^n + c \cdot q^{n-1},$$

que, após simplificação, fica

$$q^2 = q + 1.$$

Portanto ambos os números c e n desaparecem.[1]

Portanto temos uma equação quadrática para q, que podemos resolver e obter

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034, \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618034.$$

Isso nos dá dois tipos de progressão geométrica que satisfaz a mesma recorrência que os números de Fibonacci:

$$G_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad G'_n = c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(onde c é uma constante arbitrária). Infelizmente, nem G_n nem G'_n dá a seqüência de Fibonacci: por exemplo, $G_0 = G'_0 = c$ enquanto que $F_0 = 0$. Mas note que a seqüência $G_n - G'_n$ também satisfaz a recorrência:

$$G_{n+1} - G'_{n+1} = (G_n + G_{n-1}) - (G'_n + G'_{n-1}) = (G_n - G'_n) + (G_{n-1} - G'_{n-1})$$

(usando o fato de G_n e G'_n satisfaz a recorrência). Portanto casamos com o primeiro valor F_0, pois $G_0 - G'_0 = 0$. E que tal o próximo? Temos $G_1 - G'_1 = c\sqrt{5}$. Podemos casar esse com $F_1 = 1$ se escolhermos $c = 1/\sqrt{5}$.

Por conseguinte temos duas seqüências: F_n e $G_n - G'_n$, que ambas começam com os mesmos dois números, e satisfazem a mesma recorrência. Portanto podemos usar a mesma regra para calcular os números F_n como os números $G_n - G'_n$, e segue que elas devem ser as mesmas: $F_n = G_n - G'_n$.

Agora você pode substituir pelos valores de G_n e G'_n, e ver que obtivemos a fórmula no Teorema!

Vamos incluir uma pequena discussão da fórmula que acabamos de derivar. A primeira base na expressão exponencial é $q_1 = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618034 > 1$, enquanto que a segunda base q_2 está entre -1 e 0. Daí, se n cresce, então G_n ficará muito grande,

[1] Esse desaparecimento de c e n da equação poderia ser esperado. A razão por trás dele é que se encontrarmos uma seqüência que satisfaça a recorrência de Fibonacci, então podemos multiplicar seus elementos por qualquer outro número real, e obtemos uma outra seqüência que satisfaz a recorrência. Além disso, se tivermos uma seqüência que satisfaz a recorrência de Fibonacci, então começando a seqüência em algum ponto mais tarde, ela também satisfará a recorrência.

enquanto que $|G'_n| < 1/2$ uma vez que $n \geq 2$, e na verdade G'_n fica muito pequeno. Isso significa que

$$F_n \approx G_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n ,$$

onde o termo que ignoramos é menor que $1/2$ se $n \geq 2$ (e tende a 0 se n tende ao infinito); isso implica que F_n é o inteiro mais próximo a G_n.

A base $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ é um número famoso: ele é chamado de *razão dourada*, e aparece por toda a matemática; por exemplo, ela é a proporção entre a diagonal e o lado de um pentágono regular. Uma outra maneira de caracterizá-la é a seguinte: se $b : a = \tau$, então $(a+b) : b = \tau$. Portanto se a proporção entre os lados maior e menor de um retângulo é τ, então cortando um quadrado, nos resta um retângulo que é semelhante ao original.

4.14 Defina uma seqüência de inteiros L_n by $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, e $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$. (Esses números são chamados *números de Lucas*.) Mostre que L_n pode ser expresso na forma $a \cdot q_1^n + b \cdot q_2^n$ (onde q_1 e q_2 são os mesmos números que os da prova acima), e encontre os valores de a e b.

4.15 Defina uma seqüência de inteiros I_n by $I_0 = 0$, $I_1 = 1$, e $I_{n+1} = 4I_n + I_{n-1}$. (a) Encontre um problema combinatório de contagem para o qual a resposta é I_n. (b) Encontre uma fórmula para I_n.

4.16 Alice afirma que conhece uma outra fórmula para os números de Fibonacci: $F_n = \lceil e^{n/2-1} \rceil$ para $n = 1, 2, \ldots$ (onde $e = 2,718281828\ldots$ é, naturalmente, a base do logaritmo natural). Ela está correta?

Exercícios de Revisão

4.17 De quantas maneiras você pode cobrir um tabuleiro de xadrez de $2 \times n$ usando dominós?

4.18 Quantos subconjuntos o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem tais que não contêm dois inteiros consecutivos, se 0 e n também contam como consecutivos?

4.19 Quantos subconjuntos o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem tais que não contêm três inteiros consecutivos? Encontre uma recorrência.

4.20 Qual número é maior: 2^{100} ou F_{100}?

4.21 Prove as seguintes identidades:
(a) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
(b) $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}$;
(c) $\binom{n}{0}F_0 + \binom{n}{1}F_1 + \binom{n}{2}F_2 + \ldots + \binom{n}{n}F_n = F_{2n}$;
(d) $\binom{n}{0}F_1 + \binom{n}{1}F_2 + \binom{n}{2}F_3 + \ldots + \binom{n}{n}F_{n+1} = F_{2n+1}$.

4.22 Prove (4.4).

4.23 É verdade que se F_n for um primo, então n é um primo?

4.24 Considere uma seqüência de números $b_0, b_1, b_2, \ldots$ tal que $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, e $b_2, b_3, \ldots$ são definidos pela recorrência

$$b_{k+1} = 3b_k - 2b_{k-1}.$$

Encontre o valor de b_k.

4.25 Assuma que a seqûência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ satisfaz a recorrência

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}.$$

Sabemos que $a_0 = 4$ e $a_2 = 13$. Quem é a_5?

4.26 Lembrando os números de Lucas L_n introduzidos no Exercício 4.14, prove as seguintes identidades:

(a) $F_{2n} = F_n L_n$;
(b) $2F_{k+n} = F_k L_n + F_n L_k$;
(c) $2L_{k+n} = 5F_k F_n + L_k L_n$;
(d) $L_{4k} = L_{2k}^2 - 2$;
(e) $L_{4k+2} = L_{2k+1}^2 + 2$.

4.27 Prove que se $4|n$, então $3|F_n$.

4.28 (a) Prove que todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de diferentes números de Fibonacci.

(b) Prove ainda mais: todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de diferentes números de Fibonacci, de modo que nenhum par de números de Fibonacci consecutivos sejam usados.

(c) Mostre por meio de um exemplo que a representação em (a) não é unívoca, mas prove também que a representação mais restritiva em (b) o é.