Capítulo 3

Coeficientes binomiais e o Triângulo de Pascal

3.1 O Teorema Binomial

No Capítulo 1 introduzimos os números $\binom{n}{k}$, e os chamamos de *coeficientes binomiais*. É hora de explicar esse estranho nome: ele vem de uma fórmula muito importante em álgebra envolvendo-os, a qual discutimos a seguir.

A questão é calcular potências da expressão algébrica simples $(x+y)$. Começamos com pequenos exemplos:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

e, continuando assim,

$$(x+y)^4 = (x+y)\cdot(x+y)^3 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.$$

Você pode ter notado que os coeficientes que você obtém são os números que você viu, e.g. no exercício 1.41, como números $\binom{n}{k}$. Vamos tornar essa observação precisa. Ilustramos o argumento para o próximo valor de n, a saber $n = 5$, mas ele funciona em geral.

Pense em expandir

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

de modo que nos livramos de todos os parênteses. Obtemos cada termo na expansão selecionando um dos dois termos em cada fator, e os multiplicando. Se escolhemos x, digamos, 2 vezes então escolhemos y 3 vezes, e obtemos x^2y^3. Quantas vezes obtemos esse mesmo termo? Claramente tantas vezes quanto o número de maneiras de selecionar os três fatores que fornecem y (os fatores remanescentes fornecem x). Daí temos que escolher três fatores de 5, o que pode ser feito de $\binom{5}{3}$ maneiras.

Daí a expansão de $(x+y)^5$ fica algo como:

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5.$$

Podemos aplicar esse argumento em geral para obter

Teorema 3.1.1 (O Teorema Binomial) *O coeficiente de $x^{n-k}y^k$ na expansão de $(x+y)^n$ é $\binom{n}{k}$. Em outras palavras, temos a identidade:*

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Essa importante identidade, descoberta pelo famoso poeta persa e matemático Omar Khayyam (1044?–1123?), é chamada de Teorema Binomial. Seu nome vem da palavra grega *binome* para uma expressão consistindo de dois termos, nesse caso, $x+y$. O surgimento dos números $\binom{n}{k}$ nesse teorema é a fonte de seu nome: *coeficientes binomiais*.

O Teorema Binomial pode ser aplicado de muitas maneiras para obter identidades referentes a coeficientes binomiais. Por exemplo, vamos substituir $x = y = 1$, então obtemos a identidade (1.9):

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \tag{3.1}$$

Mais adiante vamos ver aplicações mais complicadas dessa idéia. No momento, uma outra dobra nela está contida no exercício (3.2).

3.1 Dê uma prova do Teorema Binomial por indução, baseada em (1.8).

3.2 (a) Prove a identidade

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots = 0$$

(A soma termina com $\binom{n}{n} = 1$, com o sinal do último termo dependendo da paridade de n.)

(b) Essa identidade é óbvia se n é ímpar. Por quê?

3.3 Prove a identidade 3.2, usando uma interpretação combinatória dos termos positivos e negativos.

3.2 Distribuindo presentes

Suponha que tenhamos n presentes diferentes, que desejamos distribuir com k crianças. Por alguma razão, nos disseram quantos presentes cada criança deveria ganhar; portanto Adam deveria ganhar n_{Adam} presentes, Barbara, n_{Barbara} presentes etc. De uma maneira matematicamente conveniente (embora não muito amigável), vamos nos referir às crianças por $1, 2, \ldots, k$; portanto nos deram os números (inteiros não-negativos)

$n_1, n_2, \ldots, n_k$. Assumimos que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, do contrário não há maneira de distribuir os presentes.

A questão é, obviamente, de quantas maneiras esses presentes podem ser distribuídos?

Podemos organizar a distribuição de presentes da seguinte maneira. Alinhamos os presentes em uma única fila de comprimento n. A primeira criança vem e pega os primeiros n_1 presentes, começando da esquerda. Então a segunda vem, e pega os próximos n_2; então a terceira pega os próximos n_3 presentes etc. A criança nº k apanha os últimos n_k presentes.

Está claro que podemos determinar quem apanha o que, escolhendo a ordem na qual os presentes são dispostos. Existem $n!$ maneiras de ordenar os presentes. Mas, é claro, o número $n!$ conta demais o número de maneiras de distribuir os presentes, pois muitas dessas ordenações levam aos mesmos resultados (isto é, toda criança apanha o mesmo conjunto de presentes). A questão é, quantas?

Portanto, vamos começar com uma dada distribuição de presentes, e vamos pedir às crianças para dispor os presentes para nós, bem organizados numa fila, começando com a primeira criança, e então continuando com a segunda, terceira, etc. Dessa maneira obtemos de volta *uma* ordenação possível que leva à distribuição atual. A primeira criança pode dispor seus presentes em $n_1!$ ordens possíveis; independentemente de que ordem ela escolha, a segunda criança pode dispor seus presentes de $n_2!$ maneiras possíveis, etc. Portanto o número de maneiras que os presentes podem ser dispostos (dada a distribuição dos presentes às crianças) é um produto de fatoriais:

$$n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!\,.$$

Por conseguinte o número de maneiras de distribuir os presentes é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}\,.$$

3.4 Podemos descrever o procedimento de distribuir os presentes da seguinte maneira. Primeiro, selecionamos n_1 presentes e os entregamos à primeira criança. Isso pode ser feito de $\binom{n}{n_1}$ maneiras. Então selecionamos n_2 presentes dos $n - n_1$ remanescentes e os entregamos à segunda criança, etc.

Complete esse argumento e mostre que ele leva ao mesmo resultado que o anterior.

3.5 Os seguintes casos especiais devem ser bem conhecidos dos problemas e teoremas anteriores. Explique por que.

(a) $n = k$, $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$;

(b) $n_1 = n_2 = \ldots = n_{k-1} = 1$, $n_k = n - k + 1$;

(c) $k = 2$;

(d) $k = 3$, $n = 6$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$.

3.6 (a) De quantas maneiras você pode colocar n torres em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum par de torres ataca uma a outra (Figura 3.1)? Assumimos que as torres são idênticas, portanto e.g. trocando duas não conta como uma colocação separada.

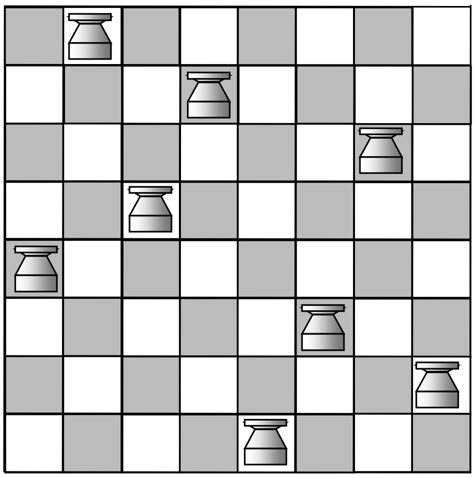

Figura 3.1: Colocando 8 torres não-atacantes em um tabuleiro de xadrez

(b) De quantas maneiras você pode fazer isso se você tem 4 torres de madeira e 4 torres de mármore?

(c) De quantas maneiras você pode fazer isso se todas as 8 torres são diferentes?

3.3 Anagramas

Você já brincou com anagramas? Seleciona-se uma palavra (digamos, COMBINATORICS) e tenta compor de suas letras palavras ou expressões com significado ou, até melhor, engraçadas.

Quantos anagramas você pode construir a partir de uma dada palavra? Se você tentar responder essa pergunta brincando com as letras, você vai se dar conta que a questão está mal posta; é difícil estabelecer uma linha divisória entre anagramas com significado e sem significado. Por exemplo, poderia facilmente acontecer que A CROC BIT SIMON. E pode ser verdade que Napoleão sempre quis TOMB IN CORSICA.[1] É questionável, mas certamente correto gramaticalmente, afirmar que COB IS ROMANTIC.[2] Algumas universidades podem ter um curso em MAC IN ROBOTICS.[3]

Mas seria preciso escrever um livro para introduzir um personagem excitante, ROBIN COSMICAT[4], que força uma COSMIC RIOT BAN,[5] enquanto apela TO COSMIC BRAIN.[6]

E seria terrivelmente difícil explicar um anagrama como MTBIRASCIONOC.

[1] N.T. uma tumba na Córsega
[2] N.T. Cob é romântico
[3] N.T. Mac em robótica
[4] N.T. possível nome próprio
[5] N.T. banimento em batalhas cósmicas
[6] N.T. ao cérebro cósmico

Para evitar essa controvérsia, vamos aceitar tudo, i.e., não exigimos que o anagrama tenha significado (ou mesmo seja pronunciável). É claro, a produção de anagramas fica então desinteressante; mas pelo menos podemos dizer quantos deles existem!

3.7 Quantos anagramas você pode fazer da palavra COMBINATORICS?

3.8 Que palavra dá origem a mais anagramas: COMBINATORICS ou COMBINATORICA? (A última é o nome do assunto em latin.)

3.9 Que palavra com 13 letras dá origem ao maior número de anagramas? Que palavra dá origem ao menor número?

Portanto vejamos a resposta geral à questão de contar anagramas. Se você solucionou os problemas acima, deve estar claro que o número de anagramas de uma palavra de n-letras depende de quantas vezes as letras da palavra são repetidas. Portanto suponha que a palavra contém a letra n$^{\underline{o}}$ 1 n_1 vezes, a letra n$^{\underline{o}}$ 2, n_2 vezes, etc., a letra n$^{\underline{o}}$ k, n_k vezes. Claramaente, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Agora para formar um anagrama, temos que selecionar n_1 posições para a letra n$^{\underline{o}}$ 1, n_2 posições para a letra n$^{\underline{o}}$ 2, etc., n_k posições para a letra n$^{\underline{o}}$ k. Tendo formulado dessa maneira, podemos ver que isso não é nada mais que a questão de distribuir n presentes a k crianças, quando está prescrito quantos presentes cada criança ganha. Por conseguinte sabemos da seção anterior que a resposta é

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

3.10 Está claro que STATUS e LETTER têm o mesmo número de anagramas (na verdade, $6!/(2!2!) = 180$). Dizemos que essas palavras são “essencialmente a mesma” (pelo menos no que diz respeito a contar anagramas): elas têm duas letras repetidas duas vezes e duas letras ocorrendo apenas uma vez. Chamamos duas palavras de “essencialmente diferentes”, se elas não são “essencialmente as mesmas”.

(a) Quantas palavras de 6-letras existem, se - só para começar - consideramos quaisquer duas palavras diferentes se elas não são completamente idênticas? (Tal qual antes, as palavras não têm que ter significado. O alfabeto tem 26 letras.)

(b) Quantas palavras com 6 letras são “essencialmente a mesma” que a palavra LETTER?

(c) Quantas palavras de 6-letras “essencialmente diferentes” existem?

(d) Tente encontrar uma resposta geral para a questão (c) (ou seja, quantas palavras “essencialmente diferentes” existem com n letras?). Se você não conseguir achar, leia a seção seguinte e retorne a este exercício após a leitura.

3.4 Distribuindo dinheiro

Ao invés de distribuir presentes, vamos distribuir dinheiro. Vamos formular a questão em geral: temos n moedinhas que desejamos distribuir entre k crianças. Cada criança tem que ganhar pelo menos uma moedinha (e, é claro, um número inteiro de moedinhas). De quantas maneiras podemos distribuir o dinheiro?

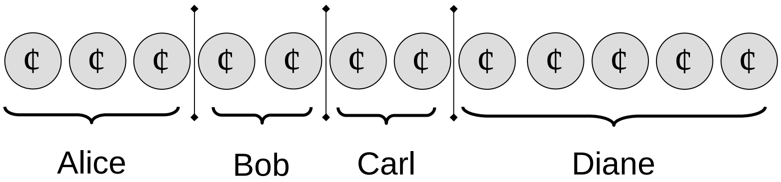

Figura 3.2: Como distribuir n moedinhas a k crianças?

Antes de responder a essa questão, temos que esclarecer a diferença entre distribuir dinheiro e distribuir presentes. Se você está distribuindo presentes, você tem que decidir não apenas quantos presentes cada criança ganha, mas também *quais* são esses presentes. Se você está distribuindo dinheiro, apenas a quantidade interessa. Em outras palavras, os presentes são *distingüíveis* enquanto que as moedinhas não o são. (Uma questão como na seção 3.2, onde especificamos antecipadamente quantos presentes uma criança ganha, seria trivial para dinheiro; existe apenas uma maneira de distribuir n moedinhas de modo que a primeira criança ganha n_1, a segunda criança ganha n_2, etc.)

Muito embora o problema seja um tanto diferente da distribuição de presentes, podemos resolvê-lo imaginando um método de distribuição semelhante. Dispomos as moedinhas (não importa em que ordem, eles são todas iguais), e então deixe a criança nº 1 começar a recolhê-los da esquerda para a direita. Após um pouco, a interrompemos e deixamos a segunda criança pegar moedinhas, etc. (Figura 3.2). *A distribuição do dinheiro é determinada especificando-se onde começar com uma nova criança.*

Agora existem $n-1$ pontos (entre as moedinhas consecutivas) onde podemos fazer entrar uma criança, e temos que selecionar $k-1$ delas (como a primeira criança sempre começa do início, não escolha aí). Por conseguinte temos que selecionar um subconjunto de $(k-1)$-elementos de um conjunto de $(n-1)$-elementos. O número de possibilidades de fazer isso é $\binom{n-1}{k-1}$.

Para resumir, obtemos

Teorema 3.4.1 *O número de maneiras de distribuir n moedinhas idênticas a k crianças, de modo que cada criança ganhe pelo menos uma, é $\binom{n-1}{k-1}$.*

É um tanto surpreendente que os coeficientes binomiais dêem a resposta aqui, de uma maneira um tanto não-trivial e inesperada.

Vamos discutir também a modificação natural (embora injusta) dessa questão, onde podemos também permitir distribuições nas quais alguma criança não ganha nada mesmo; consideramos até dar todo o dinheiro a uma criança. Com o truque a seguir, podemos reduzir o problema de se contar tais distribuições ao problema que acabamos de resolver: pedimos emprestado 1 moedinha de cada criança, e aí distribuimos a quantidade total (i.e., $n+k$ moedinhas) às crianças de modo que cada criança obtém pelo menos uma moedinha. Dessa maneira, cada criança recebe de volta o dinheiro que tomamos emprestado dela ou dele, e as sortudas ganham algo mais. Esse "mais" é exatamente n moedinhas distribuídas a k crianças. Já sabemos que o número de maneiras de distribuir $n+k$ moedinhas a k crianças de modo que cada criança ganha pelo menos uma moedinha é $\binom{n+k-1}{k-1}$. Logo, temos

Teorema 3.4.2 *O número de maneiras de distribuir n moedinhas idênticas a k crianças é $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

3.11 De quantas maneiras você pode distribuir n moedinhas a k crianças, se supõe-se que cada criança ganhe pelo menos 2?

3.12 Distribuimos n moedinhas a k meninos e ℓ meninas, de modo que (para ser realmente injusto) requeremos que cada uma das meninas ganhe pelo menos uma moedinha (mas não insistimos na mesma coisa para os meninos). De quantas maneiras podemos fazer isso?

3.13 k condes estão jogando cartas. Originalmente, eles todos têm p moedinhas. No final do jogo, eles contam quanto eles têm. Eles não tomam emprestado um do outro, de modo que eles não podem perder mais do que as suas p moedinhas. Quantos resultados possíveis existem?

3.5 O Triângulo de Pascal

Para estudar várias propriedades de coeficientes binomiais, a seguinte figura é muito útil. Arranjamos todos os coeficientes binomiais em um esquema triangular: na "zero-ésima" linha colocamos $\binom{0}{0}$, na primeira linha, colocamos $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$, na segunda linha, $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ e $\binom{2}{2}$ etc. Em geral, a n-ésima linha contém os números $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Deslocamos essas linhas de modo que seus pontos médios se encontram; dessa maneira obtemos um esquema tipo-pirâmide, chamado de *Triângulo de Pascal* (cujo nome vem do matemático e filósofo francês Blaise Pascal, 1623-1662). A Figura abaixo mostra apenas um pedaço finito do Triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Podemos substituir cada coeficiente binomial por um valor numérico, para obter uma outra versão do Triângulo de Pascal (descendo um pouquinho, até a oitava linha):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

3.14 Prove que o Triângulo de Pascal é simétrico com respeito à linha vertical que passa no seu pico.

3.15 Prove que cada linha no Triângulo de Pascal começa e termina com 1.

3.6 Identidades no Triângulo de Pascal

Olhando para o Triângulo de Pascal, não é difícil notar sua propriedade mais importante; todo número no Triângulo (exceto os 1's na fronteira) é a soma dos dois números imediatamente acima dele. Essa é na verdade uma propriedade dos coeficientes binomiais que já vimos, a saber a equação (1.8) na seção 1.8:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{3.2}$$

Essa propriedade do Triângulo de Pascal nos permite gerar o triângulo muito rapidamente, construindo-o linha a linha, usando (3.2). Ela também nos dá uma ferramenta para provar muitas propriedades dos coeficientes binomiais, como veremos adiante.

Como uma primeira aplicação, vamos dar uma nova solução do exercício 3.2. Lá a tarefa era provar a identidade

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \tag{3.3}$$

usando o teorema binomial. Agora damos uma prova baseada em (3.2): podemos substituir $\binom{n}{0}$ por $\binom{n-1}{0}$ (ambos são simplesmente 1), $\binom{n}{1}$ por $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}$, $\binom{n}{2}$ por $\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$, etc. Por conseguinte obtemos a soma

$$\binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] - \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}\right]$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + (-1)^n \binom{n-1}{n-1},$$

que é claramente 0, pois o segundo termo em cada parênteses se cancela com o primeiro termo do próximo parêntese.

Esse método dá mais que apenas uma nova prova de uma identidade que já conhecemos. O que obtemos se começarmos da mesma maneira, adicionando e subtraindo coeficientes binomiais alternadamente, mas pararmos antes? Na fórmula, tomamos

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Se aplicarmos o mesmo truque acima, obtemos

$$\binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] - \ldots$$
$$+(-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right].$$

Aqui novamente todo termo se cancela exceto o último; daí o resultado é $(-1)^k \binom{n-1}{k}$.

Existem muitas outras relações surpreendentes satisfeitas pelos números no Triângulo de Pascal. Por exemplo, vamos perguntar: qual é a soma dos *quadrados* dos elementos em cada linha?

Vamos experimentar, calculando a soma dos quadrados dos elementos em algumas das primeiras linhas:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, \\ 1^2 + 1^2 &= 2, \\ 1^2 + 2^2 + 1^2 &= 6, \\ 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 &= 20, \\ 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 &= 70. \end{aligned}$$

Podemos reconhecer esses números como os números na coluna do meio do triângulo de Pascal. É claro que somente toda segunda linha contém uma entrada na coluna do meio, de modo que o último valor acima, a soma dos quadrados na linha nº 4, é o elemento do meio na linha nº 8. Daí os exemplos acima sugerem a seguinte identidade:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \qquad (3.4)$$

É claro que os poucos experimentos acima não provam que essa identidade sempre se verifica, portanto precisamos de uma prova.

Daremos uma interpretação de ambos os lados da identidade como um resultado de um problema de contagem; vai ficar claro que eles contam as mesmas coisas, logo eles são iguais. É óbvio que o lado direito conta: o número de subconjuntos de tamanho n de um conjunto de tamanho $2n$. Será conveniente escolher, como nosso conjunto de $2n$-elementos, o conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 2n\}$.

A interpretação combinatória do lado esquerdo não é tão fácil. Considere um termo típico, digamos $\binom{n}{k}^2$. Afirmamos que esse é o número daqueles subconjuntos de

n-elementos de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ que contêm exatamente k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (a primeira metade de nosso conjunto S). Na verdade, como podemos escolher um tal subconjunto de n-elementos de S? Escolhemos k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e aí $n - k$ elementos de $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$. A primeira escolha pode ser feita de $\binom{n}{k}$ maneiras; independentemente de qual subconjunto de k-elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ selecionamos, temos $\binom{n}{n-k}$ maneiras de escolher a outra parte. Por conseguinte o número de maneiras de escolher um subconjunto de n-elementos de S tendo k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

(pela simetria do Triângulo de Pascal).

Agora, para obter o número total de subconjuntos de n-elementos de S, temos que somar esses números para todos os valores de $k = 0, 1, \ldots, n$. Isso prova a identidade (3.4).

3.16 Dê uma prova da fórmula (1.9):

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

nos moldes da prova de (3.3). (Poder-se-ia esperar que, igualmente ao caso da soma "alternante", poderíamos obter uma bela fórmula para a soma obtida parando mais cedo, como $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k}$. Mas esse não é o caso: não se conhece nenhuma expressão mais simples para essa soma em geral.)

3.17 Pelo Teorema Binomial, o lado direito na identidade (3.4) é o coeficiente de $x^n y^n$ na expansão de $(x + y)^{2n}$. Escreva $(x + y)^{2n}$ na forma $(x + y)^n (x + y)^n$, expanda ambos os fatores $(x+y)^n$ usando o teorema binomial, e aí tente estimar o coeficiente de $x^n y^n$ no produto. Mostre que isso dá uma outra prova da identidade (3.4).

3.18 Prove a seguinte identidade:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}.$$

Você pode usar uma interpretação combinatória de ambos os lados, tal qual na prova de (3.4) acima, ou o Teorema Binomial como no exercício anterior.

Aqui está uma outra relação entre os números no Triângulo de Pascal. Vamos começar com o primeiro elemento na n-ésima linha, e some os elementos andando para baixo diagonalmente para a direita (figura 3.3). Por exemplo, começando com o primeiro elemento na segunda linha, obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
1+3 &= 4, \\
1+3+6 &= 10, \\
1+3+6+10 &= 20, \\
1+3+6+10+15 &= 35.
\end{aligned}$$

Esses números são exatamente os números na próxima linha diagonal da tabela!

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&\boldsymbol{1}&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&\boldsymbol{3}&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&\boldsymbol{6}&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&\boldsymbol{10}&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&\boldsymbol{15}&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&\boldsymbol{21}&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&\boldsymbol{56}&&28&&8&&1
\end{array}$$

Figura 3.3: Adicionando diagonalmente as entradas no Triângulo de Pascal.

Se desejamos por isso numa fórmula, obtemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}. \tag{3.5}$$

Para *provar* essa identidade, usamos indução sobre k. Se $k = 0$, a identidade simplesmente diz que $1 = 1$, portanto ela é trivialmente verdadeira. (Podemos verificá-la também para $k = 1$, muito embora isso não seja necessário. De qualquer forma, ela diz que $1 + (n+1) = n+2$.)

Portanto suponha que a identidade (3.5) seja verdadeira para um dado valor de k, e desejemos provar que ela também se verifique para $k+1$ no lugar de k. Em outras palavras, desejamos provar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}.$$

Aqui, a soma dos primeiros k termos no lado esquerdo é $\binom{n+k+1}{k}$ pela hipótese da indução, e portanto o lado esquerdo é igual a

$$\binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1}.$$

Mas, isso é de fato igual a $\binom{n+k+2}{k+1}$ pela propriedade fundamental (3.2) do Triângulo de Pascal. Isso completa a prova por indução.

3.19 Suponha que você escolha um subconjunto de $(k+1)$-elementos do conjunto de $(n+k+1)$-elementos $\{1, 2, \ldots, n+k+1\}$. Você decide fazer isso escolhendo primeiro o maior elemento, e depois o resto. Mostre que contando o número de maneiras de escolher o subconjunto dessa maneira, você obtém uma prova combinatória da identidade (3.5).

3.7 Uma visão de olhos de pássaro do Triângulo de Pascal

Vamos imaginar que estamos olhando para o Triângulo de Pascal de uma certa distância. Ou, dizendo de outra maneira, não estamos interessados no valor numérico exato das entradas, mas sim na sua ordem de magnitude, subidas e descidas, e outras propriedades globais. A primeira dessas propriedades do Triângulo de Pascal é sua simetria (com respeito à linha vertical passando pelo seu pico), que já conhecemos.

Uma outra propriedade que se observa é que *ao longo de qualquer linha, as entradas aumentam até a metade, e então decresce.* Se n é par, existe um único elemento do meio na n-ésima linha, e esse é o maior; se n é ímpar, então existem dois elementos do meio iguais, que são os maiores.

Portanto vamos *provar* que as entradas aumentam até o meio (e aí eles começam a decrescer pela simetria da tabela). Queremos comparar duas entradas consecutivas:

$$\binom{n}{k} \;?\; \binom{n}{k+1}.$$

Se usarmos a fórmula no Teorema 1.8.1, podemos escrever isso como

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \;?\; \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)k\ldots 1}.$$

Existe uma porção de fatores comuns em ambos os lados que são positivos, e portanto podemos simplificar. Obtemos a comparação realmente simples

$$1 \;?\; \frac{n-k}{k+1}.$$

Rearrumando, obtemos

$$k \;?\; \frac{n-1}{2}.$$

Logo se $k < (n-1)/2$, então $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$; se $k = (n-1)/2$, então $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ (esse é o caso das duas entradas no meio se n é ímpar); e se $k > (n-1)/2$, então $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$.

Será útil mais adiante o fato de que esse cálculo também descreve de *quanto* os elementos consecutivos aumentam ou decrescem. Se começarmos da esquerda, a segunda entrada (a saber, n) é maior por um fator de n que o primeiro; o terceiro (a saber,

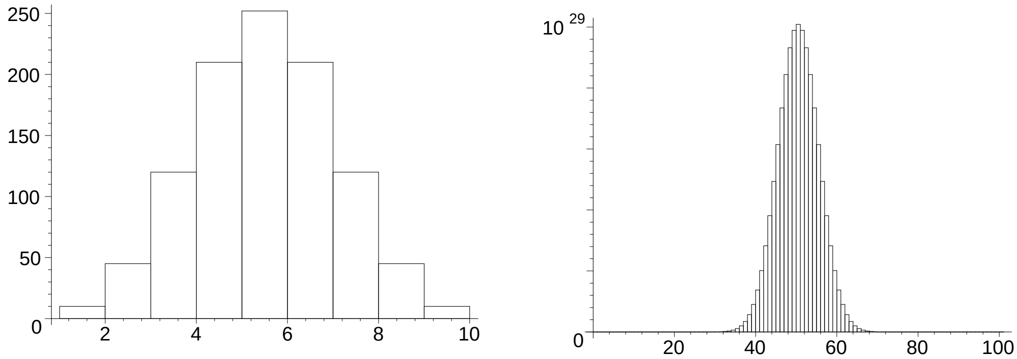

Figura 3.4: Código de barra da n-ésima linha do Triângulo de Pascal, para $n = 10$ e 100.

$n(n-1)/2$) é maior por um fator de $(n-1)/2$ que o segundo. Em geral,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}. \tag{3.6}$$

3.20 Para quais valores de n e k o valor $\binom{n}{k+1}$ é o dobro da entrada anterior no Triângulo de Pascal?

3.21 Ao invés da proporção, olhe para a diferença entre duas entradas consecutivas no Triângulo de Pascal:

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}.$$

Para qual valor de k essa diferença é a maior?

Sabemos que cada linha do Triângulo de Pascal é simétrica. Sabemos também que as entradas começam com 1, aumentam até o meio, e aí caem para 1. Podemos dizer mais sobre seu formato?

A figura 3.4 mostra o grafo dos números $\binom{n}{k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) para os valores $n = 10$ e $n = 100$. Podemos fazer várias observações.

— Primeiro, que o maior número fica muito grande.

— Segundo, não apenas que esses números aumentam até o meio e aí eles decrescem, mas que os elementos do meio são substantialmente maiores que aqueles no início e no fim. Para $n = 100$, vemos alguma barra apenas na faixa $\binom{100}{25}, \binom{100}{26}, \dots, \binom{100}{75}$; os números fora dessa faixa são tão pequenos comparados com o maior que eles não aparecem nessa figura.

— Terceiro, podemos observar que o formato do grafo é um tanto semelhante para valores diferentes de n.

Vamos olhar mais cuidadosamente para essas observações. Para as discussões que se seguem, vamos assumir que n é par (para valores ímpares de n, os resultados seriam um tanto semelhantes, somente seria preciso frasear diferentemente). Se n é par, então já sabemos que a maior entrada na n-ésima linha é o número do meio $\binom{n}{n/2}$, e todas as outras entradas são menores.

Quão grande é o maior número na n-ésima linha do Triângulo de Pascal? Conhecemos imediatamente um limitante superior sobre esse número:

$$\binom{n}{n/2} < 2^n,$$

pois 2^n é a soma de todas as entradas na linha. É preciso um pouco mais de sofisticação para se chegar a um limitante inferior:

$$\binom{n}{n/2} > \frac{2^n}{n+1},$$

pois $2^n/(n+1)$ é a média dos números na linha, e o maior número é certamente pelo menos tão grande quanto a média.

Esses limitantes já dão uma idéia muito boa sobre o tamanho de $\binom{n}{n/2}$; em particular, eles de fato mostram que esse número fica muito grande. Tome, digamos, $n = 500$. Daí, obtemos

$$\frac{2^{500}}{501} < \binom{500}{250} < 2^{500}.$$

Se desejarmos saber o número de dígitos de $\binom{500}{250}$, precisamos somente de tomar o logaritmo (na base 10) desse valor. Dos limitantes acima, obtemos

$$500 \lg 2 - \lg 501 = 147,8151601 \ldots < \lg \binom{500}{250} < 500 \lg 2 = 150,5149978 \ldots$$

Essa desigualdade dá o número de dígitos com um pequeno erro: se adivinharmos que ele é 150, então erramos por no máximo 2 (na verdade, 150 é o verdadeiro valor).

Usando a Fórmula de Stirling (Teorema 2.2.1), pode-se obter uma aproximação ainda melhor dessa entrada maior. Sabemos que

$$\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}.$$

Aqui, pela fórmula de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad (n/2)! \sim \sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2},$$

e daí

$$\binom{n}{n/2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\pi n(n/(2e))^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}2^n. \tag{3.7}$$

Portanto sabemos que que a maior entrada na n-ésima linha do triângulo de Pascal está no meio, e sabemos aproximadamente quão grande é esse elemento. Sabemos também que indo para a esquerda ou para a direita, os elementos começam a cair. Quão rapidamente eles caem? A figura sugere que começar do meio, os coeficientes binomiais caem somente um pouco no início, mas rapidamente isso se acelera.

Olhando a partir da outra extremidade, vemos isso ainda mais claramente. Vamos tomar, digamos, a linha nº 57 (só para tomar um número não-redondo para variar). Os primeiros poucos elementos são:

$$1,\ 57,\ 1596,\ 29260,\ 395010,\ 4187106,\ 36288252,\ 264385836,\ 1652411475,$$

$$8996462475,\ 43183019880,\ 184509266760,\ 707285522580,\ \ldots$$

e as proporções entre as entradas consecutivas são:

$$57,\ 28,\ 18{,}33,\ 13{,}5,\ 10{,}6,\ 8{,}67,\ 7{,}29,\ 6{,}25,\ 5{,}44,\ 4{,}8,\ 4{,}27,\ 3{,}83,\ \ldots$$

Enquanto as entradas estão crescendo rapidamente, essas proporções ficam menores e menores, e sabemos que quando chegamos ao meio, eles ficam menores que 1 (pois as entradas propriamente ditas começam a decrescer). Mas quais são essas proporções? Calculamos acima, e encontramos que

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Se escrevermos isso como

$$\frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1,$$

então vemos imediatamente que a proporção entre dois coeficientes binomiais decresce quando k aumenta.

3.8 Uma visão de olhos de águia: detalhes finos

Vamos fazer uma pergunta mais quantitativa sobre o formato de uma linha no triângulo de Pascal: Qual coeficiente binomial nessa linha é (por exemplo) metade do maior?

Consideramos o caso quando n é par; então podemos escrever $n = 2m$, onde m é um inteiro positivo. A entrada maior, do meio, na n-ésima linha é $\binom{2m}{m}$. Considere o coeficiente binomial que está a t passos antes do meio. Não importa se vamos para a esquerda ou para a direita, portanto tome, digamos, $\binom{2m}{m-t}$. Queremos compará-lo ao maior coeficiente.

A seguinte fórmula descreve a taxa na qual os coeficientes binomiais caem:

$$\binom{2m}{m-t} \Big/ \binom{2m}{m} \approx e^{-t^2/m}\,. \tag{3.8}$$

O lado direito de (3.8) é mostrado na Figura 3.5 para $m = 50$ (como uma função de t). Esse é a famosa *curva de Gauss* (às vezes também chamada de "curva do sino"). Desenhar o grafo de muitos tipos de estatísticas dá uma figura semelhante. Na Figura 3.5

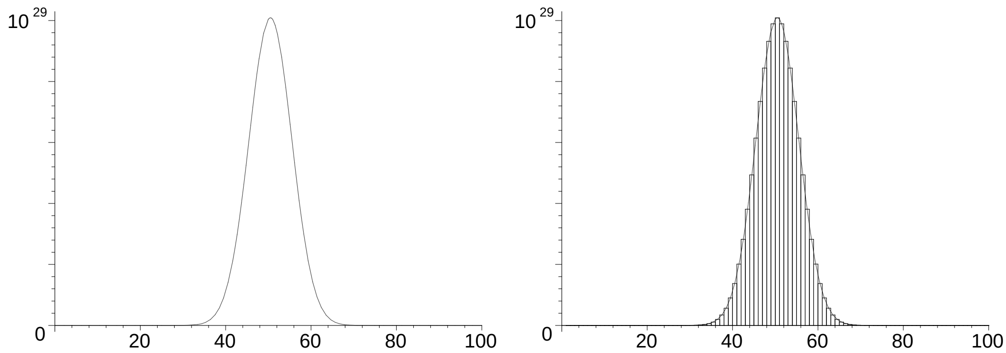

Figura 3.5: A curva de Gauss $e^{-t^2/m}$ para $m = 50$, e o gráfico de coeficientes binomiais na 100-ésima linha do triângulo de Pascal.

mostramos a curva sozinha e também sobreposta com os coeficientes binomiais, para mostrar o excelente casamento.

A equação (3.8) não é uma equação exata, e para torná-la um enunciado matemático preciso, precisamos dizer quão grande pode ser o erro. Abaixo derivaremos as seguintes desigualdades:

$$e^{-t^2/(m-t+1)} \leq \binom{2m}{m-t} \Big/ \binom{2m}{m} \leq e^{-t^2/(m+t)} . \tag{3.9}$$

Os limitantes superiores e inferiores nessa fórmula são um tanto semelhantes à aproximação (imprecisa) $e^{-t^2/m}$ dada em (3.8), e é fácil ver que esse último valor está entre eles. (3.8) na verdade dá uma aproximação melhor que o limitante superior ou o limitante inferior. Por exemplo, suponha que desejemos estimar a proporção de $\binom{100}{40} \big/ \binom{100}{50}$, que é $0,1362\ldots$. De (3.9) obtemos

$$0,08724 \leq \binom{100}{40} \Big/ \binom{100}{50} \leq 0,1889,$$

enquanto que a aproximação dada em (3.8 é $0,1353\ldots$, muito mais próxima da verdade. Usando cálculo mais pesado (análise) daríamos limitantes mais justos; apenas damos aqui tanto quando podemos sem apelar para o cálculo.

Para derivar (3.9), comece transformando a proporção no meio; ou então, tomemos sua recíproca, que é maior que 1 e, por conseguinte, um pouco mais fácil para trabalhar:

$$\begin{aligned} \binom{2m}{m} \Big/ \binom{2m}{m-t} &= \frac{(2m)!}{m!m!} \Big/ \frac{(2m)!}{(m-t)!(m+t)!} = \frac{(m-t)!(m+t)!}{m!m!} \\ &= \frac{(m+t)(m+t-1)\ldots(m+1)}{m(m-1)\ldots(m-t+1)}. \end{aligned}$$

Portanto temos algo como uma fórmula para essa taxa, mas quão útil ela é? Como dizemos, por exemplo, para qual valor t essa taxa fica maior que 2? Podemos certamente escrever isso como uma fórmula:

$$\frac{(m+t)(m+t-1)\dots(m+1)}{m(m-1)\dots(m-t+1)} > 2. \tag{3.10}$$

Poderíamos tentar resolver essa desigualdade para t (tal qual fizemos quando provamos que as entradas são crescentes até o meio), mas seria demasiado complicado resolver. Daí, até para responder a uma questão simples como essa sobre coeficientes binomiais como, por exemplo, quão distante do meio eles caem para a metade do máximo, precisa de mais trabalho, e temos que fazer algum truque aritmético. question about binomial coefficients like how far from the middle do Dividimos o primeiro fator do numerador pelo primeiro fator do denominador, o segundo fator pelo segundo fator, etc., para obter

$$\frac{m+t}{m} \cdot \frac{m+t-1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{m+1}{m-t+1}.$$

Esse produto ainda não é fácil de manusear, mas encontramos produtos semelhantes na seção 2.5! Lá o truque era tomar o logaritmo, e isso funciona aqui da mesma forma. Obtemos

$$\ln\left(\frac{m+t}{m}\right) + \ln\left(\frac{m+t-1}{m-1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{m+1}{m-t+1}\right).$$

Tal qual na seção 2.5, podemos estimar os logaritmos no lado esquerdo usando as desigualdades no Lema 2.5.1. Vamos começar derivando um limitante superior. Para um termo típico na soma temos

$$\ln\left(\frac{m+t-k}{m-k}\right) \le \frac{m+t-k}{m-k} - 1 = \frac{t}{m-k},$$

e portanto

$$\ln\left(\frac{m+t}{m}\right) + \ln\left(\frac{m+t-1}{m-1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{m+1}{m-t+1}\right)$$
$$\le \frac{t}{m} + \frac{t}{m-1} + \dots + \frac{t}{m-t+1}.$$

Podemos trazer essa soma para uma forma fechada? Não, mas podemos usar um outro truque da seção 2.5. Substituimos cada denominador por $m-t+1$, pois esse é o menor; daí aumentamos todas as frações (exceto a última, que nãoo muda) e obtemos um limitante superior:

$$\frac{t}{m} + \frac{t}{m-1} + \dots + \frac{t}{m-t+1} \le \frac{t}{m-t+1} + \frac{t}{m-t+1} + \dots + \frac{t}{m-t+1}$$
$$= \frac{t^2}{m-t+1}.$$

Não esqueça de inverter os logaritmos: obtemos somente o limitante inferior em (3.9).

Para derivar o limitante superior em (3.9), aplicamos o limitante inferior no Lema 2.5.1 aos logaritmos. Para um termo típico novamente, obtemos

$$\ln\left(\frac{m+t-k}{m-k}\right) \geq \frac{\frac{m+t-k}{m-k}-1}{\frac{m+t-k}{m-k}} = \frac{t}{m+t-k},$$

e portanto

$$\ln\left(\frac{m+t}{m}\right) + \ln\left(\frac{m+t-1}{m-1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{m+1}{m-t+1}\right)$$
$$\geq \frac{t}{m+t} + \frac{t}{m+t-1} + \ldots + \frac{t}{m+1}\,.$$

Novamente, não podemos trazer essa soma para uma forma fechada, mas podemos substituir cada denominador pelo *maior* para diminuir a soma:

$$\frac{t}{m+t} + \frac{t}{m+t-1} + \ldots + \frac{t}{m+1} \geq \frac{t^2}{m+t}\,.$$

Invertendo os logaritmos, isso dá o limitante superior em (3.9).

Vamos retornar à nossa questão anterior: desejamos saber quando (para qual valor de t) o quociente em (3.9) será maior que 2. Podemos precisar de informação semelhante para outros números ao invés de 2, portanto vamos tentar responder a questão para um número geral $C > 1$. Por conseguinte, desejamos saber para qual valor de t obtemos

$$\binom{2m}{m} \Big/ \binom{2m}{m-t} > C. \tag{3.11}$$

De (3.8) sabemos que o lado esquerdo é cerca de $e^{t^2/m}$, logo começamos a resolver a equação

$$e^{t^2/m} = C.$$

A função exponencial no lado esquerdo parece complicada, mas o bom e velho logaritmo ajuda novamente: obtemos

$$\frac{t^2}{m} = \ln C,$$

que é agora fácil de resolver:

$$t = \sqrt{m \ln C}.$$

Portanto esperamos que se t for maior que isso, então (3.11) se verifica. Mas, é claro que temos que estar cientes do fato de que isso é apenas uma aproximação, não um resultado preciso! Ao invés de (3.8), podemos usar as desigualdades exatas (3.9) para obter o seguinte lema importante:

Lema 3.8.1 *Se $t \geq \sqrt{m \ln C} + \ln C$ então (3.11) se verifica; se $t \leq \sqrt{m \ln C} - \ln C$ então (3.11) não se verifica.*

A derivação dessas condições a partir de (3.9) é semelhante à derivação do resultado aproximado a partir de (3.8) e isso deixamos ao leitor como exercício 3.23 (difícil!).

Em importantes aplicações de coeficientes binomiais (uma das quais, a Lei dos Números Grandes, será discutida no Capítulo 5), também precisamos conhecer um bom limitante para a soma dos menores coeficientes binomiais, comparado com a soma de todos eles. Felizmente, nossas observações e lemas anteriores nos habilitam a obter uma resposta com um pouco de cálculo mas se novas idéias substanciais.

Lema 3.8.2 *Suponha que* $0 \le k \le m$ *e* $c = \binom{2m}{k} \Big/ \binom{2m}{m}$. *Então*

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \ldots + \binom{2m}{k-1} < \frac{c}{2} 2^{2m}. \tag{3.12}$$

Para digerir o significado disso, escolha $m = 500$, e vamos tentar ver quantos coeficientes binomiais na 1000-ésima linha temos que adicionar (começando com $\binom{1000}{0}$), para atingir 0,5% do total. O Lema 3.8.2 nos diz que se escolhermos $0 \le k \le 500$ de modo que $\binom{1000}{k} \Big/ \binom{1000}{500} < 1/100$, então somando os primeiros k coeficientes binomiais dá uma soma menor que 0,5% do total. Por sua vez, o Lema 3.8.1 nos dá um k que será certamente bom: qualquer $k \le 500 - \sqrt{500 \ln 100} - \ln 100 = 447,4$. Daí as primeiras 447 entradas na 1000-ésima linha do Triângulo de Pascal chegam a menos que 0,5% da soma total. Pela simetria do Triângulo de Pascal, as últimas 447 somam uns outros menos que 0,5%. Os 107 termos do meio dão conta de 99% do total.

Prova. Para provar esse lema, vamos escrever $k = m - t$, e comparar a soma no lado esquerdo de (3.12) com a soma

$$\binom{2m}{m-t} + \binom{2m}{m-t+1} + \ldots + \binom{2m}{m-1}. \tag{3.13}$$

Vamos representar a soma $\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \ldots + \binom{2m}{m-t-1}$ por A, e a soma $\binom{2m}{m-t} + \binom{2m}{m-t+1} + \ldots + \binom{2m}{m-1}$ by B.

Temos

$$\binom{2m}{m-t} = c\binom{2m}{m}$$

pela definição de c. Isso implica que

$$\binom{2m}{m-t-1} < c\binom{2m}{m-1},$$

pois sabemos que os coeficientes binomiais caem de um fator maior de $\binom{2m}{m-t}$ para $\binom{2m}{m-t-1}$ que eles caem de $\binom{2m}{m}$ para $\binom{2m}{m-1}$. Repetindo o mesmo argumento[7], obtemos que

$$\binom{2m}{m-t-i} < c\binom{2m}{m-i}$$

para todo $i \ge 0$.

[7]Em outras palavras, usamos indução.

Daí segue que a soma de quaisquer t coeficientes binomiais consecutivos é menor que c vezes a soma dos próximos t (desde que esses estejam todos no lado esquerdo do Triângulo de Pascal). Voltando de $\binom{2m}{m-1}$, o primeiro bloco de t coeficientes binomiais soma A (pela definição de A); o próximo bloco de t soma menos que cA, o próximo bloco, menos que c^2A, etc. Somando, obtemos que

$$B < cA + c^2A + c^3A \ldots$$

No lado direito, temos apenas que somar $\lceil (m-t)/t \rceil$ termos, mas somos generosos e deixar o somatório ir ao infinito! A série geométrica no lado direito soma $\frac{c}{1-c}A$, de modo que chegamos a

$$B < \frac{c}{1-c}A.$$

Precisamos de uma outra desigualdade envolvendo A e B, mas isso é fácil:

$$B + A < \frac{1}{2}2^{2m}$$

(pois a soma no lado esquerdo inclui apenas o lado esquerdo do Triângulo de Pascal, e o elemento do meio não é sequer contado). Dessas duas desigualdades obtemos

$$B < \frac{c}{1-c}A < \frac{c}{1-c}\left(\frac{1}{2}2^{2m} - B\right),$$

e portanto

$$\left(1 + \frac{c}{1-c}\right)B < \frac{c}{1-c}\frac{1}{2}2^{2m}.$$

Multiplicando por $1-c$ resulta que $B < c\frac{1}{2}2^{2m}$, o que prova o lema. $\square$

3.22 (a) Verifique que a aproximação em (3.8) está sempre entre os limitantes inferior e superior dados em (3.9).

(b) Faça $2m = 100$ e $t = 10$. Por qual percentagem o limitante superior é maior em (3.9) é maior que o limitante inferior?

3.23 Complete a prova do Lema 3.8.1.

Exercícios de Revisão

3.24 Encontre todos os valores de n e k para os quais $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k}$.

3.25 Encontre o valor de k para o qual $k\binom{99}{k}$ é máximo.

3.26 Em uma cidade com um mapa de ruas do tipo ”tabuleiro de xadrez”normal, as ruas N-S são chamadas 1a. Rua, 2a. Rua, ..., 20a. Rua, e as ruas L-O são chamadas 1a. Avenida, 2a. Avenida, ..., 10a. Avenida. Qual é o número mínimo de blocos que você tem que andar para ir da esquina da 1a. Rua e 1a. Avenida para a esquina da 20a. Rua e 10a. Avenida? De quantas maneiras você pode chegar lá caminhando esse número mínimo de blocos?

3.27 De quantas maneiras você pode extrair a palavra MATHEMATICS das seguintes tabelas:

M	A	T	H	E	M
A	T	H	E	M	A
T	H	E	M	A	T
H	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	C
M	A	T	I	C	S

M	A	T	H		
A	T	H	E		
T	H		M	A	
H	E		A	T	I
	M	A	T	I	C
			I	C	S

3.28 Prove as seguintes identidades:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

3.29 Prove as seguintes desigualdades:

$$\frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}.$$

3.30 De quantas maneiras você pode distribuir n moedinhas a k crianças, se cada criança deve receber pelo menos 5?

3.31 Prove que se movermos de cima para baixo no Triângulo de Pascal (visitando uma linha sim outra não), então vemos que os números estão aumentando.

3.32 Prove que

$$1+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}4+\ldots+\binom{n}{n-1}2^{n-1}+\binom{n}{n}2^n = 3^n.$$

Tente encontrar uma prova combinatória.

3.33 Suponha que você deseje escolher um subconjunto de $(2k+1)$-elementos do conjunto de n-elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$. Você decide fazer isso escolhendo primeiro o elemento do meio, então os k elements à sua esquerda, então os k elementos à sua direita. Formule a identidade combinatória que você obtém disso.

3.34 Seja n um inteiro positivo divisível por 3. Use a Fórmula de Stirling para encontrar o valor aproximado de $\binom{n}{n/3}$.

3.35 Prove que $\binom{n}{10} \sim \frac{n^{10}}{10!}$.