Capítulo 2

Ferramentas combinatórias

2.1 Indução

Está na hora de aprender uma das mais importantes ferramentas em matemática discreta. Começamos com uma questão:

Somamos os primeiros n números ímpares. O que obtemos?

Talvez a melhor maneira de tentar encontrar a resposta é experimentar. Se tentarmos valores pequenos de n, isso é o que encontramos:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+3 &= 4\\
1+3+5 &= 9\\
1+3+5+7 &= 16\\
1+3+5+7+9 &= 25\\
1+3+5+7+9+11 &= 36\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49\\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100
\end{aligned}$$

É fácil observar que obtemos quadrados; na verdade, ao que parece desses exemplos é que *a soma dos primeiros n números ímpares é n^2*. Isso observamos para os primeiros 10 valores de n; será que podemos ter certeza de que isso é válido para todos? Bem, eu diria que podemos ficar razoavelmente certos, mas não com certeza matemática. Como é que podemos *provar* a asserção?

Considere a soma para um n geral. O n-ésimo número ímpar é $2n-1$ (verifique!), portanto desejamos provar que

$$1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2. \tag{2.1}$$

Se separarmos o último termo nessa soma, nos resta a soma dos primeiros $(n-1)$ números ímpares:

$$1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=\Big(1+3+\ldots+(2n-3)\Big)+(2n-1)$$

Agora, aqui a soma dentro dos parênteses grandes é $(n-1)^2$, de modo que o total é

$$(n-1)^2+(2n-1)=(n^2-2n+1)+(2n-1)=n^2, \tag{2.2}$$

tal qual desejávamos provar.

Espere um minuto! Não estamos usando na prova o enunciado que estamos provando? Certamente isso é injusto! Poder-se-ia provar tudo se isso fosse permitido!

Mas, na realidade não estávamos usando de fato o mesmo enunciado. O que estávamos usando era a asserção sobre a soma dos primeiros $n-1$ números ímpares; e argumentamos (em (2.2)) que isso prova a asserção sobre a soma dos primeiros n números ímpares. Em outras palavras, o que mostramos é que se a asserção é verdadeira para um certo valor de n, ela é verdadeira também para o próximo.

Isso é suficiente para concluir que a asserção é verdadeira para todo n. Vimos que ela é verdadeira para $n=1$; daí pelo que se disse acima, ela é verdadeira também para $n=2$ (vimos isso de qualquer forma por meio de um cálculo direto, mas isso mostra que isso não era sequer necessário: vem do caso $n=1$).

De modo semelhante, a veracidade da asserção para $n=2$ implica que ela é também verdadeira para $n=3$, que por sua vez implica que ela é verdadeira para $n=4$, etc. Se repetirmos isso um número suficiente de vezes, obtemos a veracidade para qualquer valor de n.

Essa técnica de prova é chamada de *indução* (ou às vezes *indução matemática*, para distingüí-la de uma noção da filosofia). Ela pode ser resumida da seguinte forma.

Suponha que desejamos provar uma propriedade de inteiros positivos. Suponha também que podemos provar dois fatos:

(a) 1 tem a propriedade, e

(b) sempre que $n-1$ tem a propriedade, então n também tem a propriedade ($n>1$).

O *Princípio da Indução* diz que se (a) e (b) são (sentenças) verdadeiras, então todo número natural tem a propriedade.

Frequentemente a melhor maneira de tentar realizar uma prova por indução é a seguinte. Tentamos provar o enunciado (para um valor geral de n), e temos permissão de usar o fato de que o enunciado é verdadeiro se n for substituído por $n-1$. (Isso é chamado de *hipótese da indução*.) Se for ajudar pode-se também usar a validade do enunciado para $n-2$, $n-3$, etc., em geral para todo k tal que $k<n$.

Às vezes dizemos que se 0 tem a propriedade, e todo inteiro n *herda* a propriedade de $n-1$, então todo inteiro tem a propriedade. (Tal qual se o fundador de uma família tem uma certa propriedade, e toda nova geração herda essa propriedade de sua geração anterior, então a família sempre terá essa propriedade.)

2.1 Prove, usando indução mas também sem usá-la, que $n(n+1)$ é um número par para todo inteiro não-negativo n.

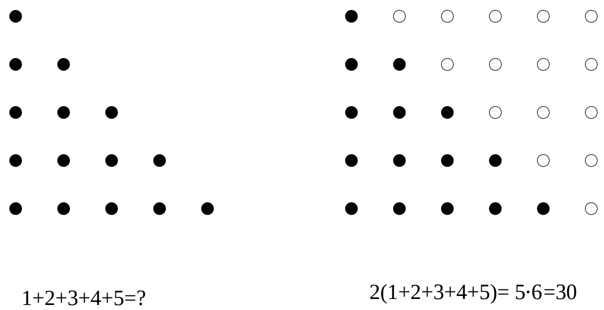

Figura 2.1: A soma dos n primeiros inteiros

2.1 Prove por indução que a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n+1)/2$.

2.2 Observe que o número $n(n+1)/2$ é a quantidade de apertos de mão entre $n+1$ pessoas. Suponha que todo mundo conta apenas apertos de mão com pessoas mais velhas que ele/ela (um tanto esnobe, não é?). Quem contará o maior número de apertos de mão? Quantas pessoas contam 6 apertos de mão?

Dê uma prova do resultado do exercício 2.1, baseada na sua resposta a essas questões.

2.3 Dê uma prova do exercício 2.1, baseada na figura 2.1.

2.4 Prove a seguinte identidade:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

O exercício 2.1 tem a ver com uma anedota bem conhecida da história da matemática. Carl Friedrich Gauss (1777–1855), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, estava na escola primária quando sua professora deu à turma a tarefa de somar os inteiros de 1 a 1000. Ela estava achando que ela teria uma hora ou mais para relaxar enquanto seus alunos estavam trabalhando. (A estória é apócrifa, e aparece com vários números para somar: de 1 a 100, ou 1900 a 2000.) Para sua grande surpresa, Gauss veio com a resposta correta quase que imediatamente. Sua solução era extremamente simples: combine o primeiro termo com o último, e você obtém $1 + 1000 = 1001$; combine o segundo termo com o penúltimo, e você obtém $2 + 999 = 1001$; continuando de maneira semelhante, combinando o primeiro termo remanescente com o último (e aí então descartando-os) você obtém 1001. O último par adicionado dessa maneira é $500 + 501 = 1001$. Portanto obtivemos 500 vezes 1001, o que faz 500500. Podemos verificar essa resposta em confronto com a fórmula dada no exercício 2.1: $1000 \cdot 1001/2 = 500500$.

2.5 Use o método do pequeno Gauss para dar uma terceira prova da fórmula no exercício 2.1

2.6 Como o pequeno Gauss provaria a fórmula (2.1) para a soma dos n primeiros números ímpares?

2.7 Prove que a soma dos n primeiros quadrados $(1+4+9+\ldots+n^2)$ é $n(n+1)(2n+1)/6$.

2.8 Prove que a soma das n primeiras potências de 2 (começando com $1 = 2^0$) é $2^n - 1$.

No capítulo 1 nos apoiamos frequentemente na conveniência de dizer "etc.": descrevemos algum argumento que tinha que ser repetido n vezes para dar o resultado que desejávamos obter, mas após dar o argumento uma vez ou duas vezes, dizíamos "etc." ao invés de maior repetição. Não há nada errado com isso, se o argumento é suficientemente simples de modo que podemos ver intuitivamente para onde a repetição leva. Mas seria ótimo ter alguma ferramenta em mãos que pudesse ser usada ao invés de "etc." em casos em que o resultado da repetição não é tão transparente.

A maneira precisa de fazer isso é usar indução, como vamos ilustrar revisitando alguns de nossos resultados. Primeiro, vamos dar uma prova da fórmula para o número de subconjuntos de um conjunto de n-elementos, dada no Teorema 1.3.1 (lembre-se que a resposta é 2^n).

Como o Princípio da Indução nos diz, temos que verificar que a asserção é verdadeira para $n = 0$. Isso é trivial, e já o fizemos. A seguir, assumimos que $n > 0$, e que a asserção é verdadeira para conjuntos com $n - 1$ elementos. Considere um conjunto S com n elementos, e fixe um elemento qualquer $a \in S$. Desejamos contar os subconjuntos de S. Vamos dividí-los em duas classes: aqueles contendo a e aqueles não contendo a. Contemo-los.

Primeiro, lidamos com aqueles subconjuntos que não contêm a. Se removermos a de S, nos resta um conjunto S' com $n - 1$ elementos, e os subconjuntos nos quais estamos interessados são exatamente os subconjuntos de S'. Pela hipótese da indução, o número de tais subconjuntos é 2^{n-1}.

Segundo, consideramos subconjuntos contendo a. A observação chave é que todo conjunto desse consiste de a e um subconjunto de S'. Reciprocamente, se tomarmos qualquer subconjunto de S', podemos adicionar a a ele para obter um subconjunto de S contendo a. Logo o número de subconjuntos de S contendo a é o mesmo que o número de subconjuntos de S', que, como já sabemos, é 2^{n-1}. (Com o jargão que introduzimos anteriormente, o último pedaço do argumento estabelece uma correspondência um-para-um entre aqueles subconjuntos de S contendo a e aqueles não contendo a.)

Para concluir: o número total de subconjuntos de S é $2^{n-1}+2^{n-1} = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$. Isso prova o Teorema 1.3.1 (novamente).

2.9 Use indução para provar o Teorema 1.5.1 (o número de cadeias de comprimento n compostas de k elementos dados é k^n) e o Teorema 1.3 (o número de permutações de um conjunto com n elementos é $n!$).

2.10 Use indução sobre n para provar o "teorema do aperto de mão" (o número de apertos de mão entre n pessoas é $n(n-1)/2$).

2.11 Leia cuidadosamente a seguinte prova por indução:

ASSERÇÃO: *$n(n+1)$ é um número ímpar para todo n.*

PROVA: Suponha que isso seja verdadeiro para $n - 1$ no lugar de n; provamos para n, usando a hipótese da indução. Temos

$$n(n+1) = (n-1)n + 2n.$$

Agora aqui $(n-1)n$ é ímpar pela hipótese da indução, e $2n$ é par. Logo, $n(n+1)$ é a soma de um número ímpar com um número par, que é um número ímpar.

A asserção que provamos está obviamente errada para $n = 10$: $10 \cdot 11 = 110$ é par. O que está errado na prova?

2.12 Leia cuidadosamente a seguinte prova por indução:

ASSERÇÃO: *Se temos n retas no plano, das quais nenhuma é paralela à outra, então todas elas passam por um ponto.*

PROVA: A asserção é verdadeira para uma reta (e também para 2, pois assumimos que em nenhum par de retas uma era paralela à outra). Suponha que seja verdadeira para qualquer conjunto de $n-1$ retas. Vamos provar que é também verdadeira para n retas, usando essa hipótese da indução.

Portanto, considere um conjunto $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$ de n retas no plano, das quais para nenhum par uma é paralela à outra. Remova a reta c, então nos resta um conjunto S' de $n-1$ retas, e obviamente para nenhum par uma delas é paralela à outra. Portanto podemos aplicar a hipótese da indução e concluir que existe um ponto P tal que todas as retas em S' passam por P. Em particular, a e b passam por P, e portanto P deve ser o ponto de interseção de a e b.

Agora ponha c de volta e remova d, para obter um conjunto S'' de $n-1$ retas. Tal qual o caso acima, podemos usar a hipótese de indução para concluir que essas retas passam pelo mesmo ponto P'; mas tal qual no caso acima, P' deve ser o ponto de interseção de a e b. Por conseguinte $P' = P$. Mas então vemos que c passa por P. As outras retas também passam por P (pela escolha de P), e portanto todas as n retas passam por P.

Mas, a asserção que provamos está claramente errada; onde está o erro?

2.2 Comparando e estimando números

É ótimo se ter fórmulas para certos números (por exemplo, para o número $n!$ de permutações de n elementos), mas frequentemente é mais importante se ter uma idéia aproximada sobre quão grande esses números são. Por exemplo, quantos dígitos tem 100!?

Vamos começar com questões mais simples. Qual é maior, n ou $\binom{n}{2}$? Para $n = 2, 3, 4$ o valor de $\binom{n}{2}$ é $1, 3, 6$, portanto ele é menor que n para $n = 2$, igual para $n = 3$, porém maior para $n = 4$. Na verdade $n = \binom{n}{1} < \binom{n}{2}$ se $n \geq 4$.

Mais pode ser dito: o quociente

$$\frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$$

fica arbitrariamente grande se n for suficientemente grande; por exemplo, se queremos que esse quociente seja maior que 1000, basta escolher $n > 2001$. Na linguagem do cálculo, temos

$$\frac{\binom{n}{2}}{n} \to \infty \qquad (n \to \infty)\,.$$

Uma outra questão simples: qual é maior, n^2 ou 2^n? Para valores pequenos de n, isso pode ir para qualquer lado: $1^2 < 2^1$, $2^2 = 2^2$, $3^2 > 2^3$, $4^2 = 2^4$, $5^2 < 2^5$. Mas daí em diante, 2^n decola e cresce muito mais rápido que n^2. Por exemplo, $2^{10} = 1024$ é muito maior que $10^2 = 100$. Na verdade, $2^n/n^2$ fica arbitrariamente grande, se n é grande o bastante.

2.13 (a) Prove que $2^n > \binom{n}{3}$ se $n \geq 3$.

(b) Use (a) para provar que $2^n/n^2$ fica arbitrariamente grande se n é grande o bastante.

Agora atacamos o problema de se estimar 100! ou, em geral, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. O primeiro fator 1 não importa, mas todos os outros são no mínimo 2, portanto $n! \geq 2^{n-1}$. Igualmente, $n! \leq n^{n-1}$, pois (ignorando o fator 1 novamente) $n!$ é o produto de $n - 1$ fatores, cada um dos quais é no máximo n. (Como todos exceto um deles são menores que n, o produto é na verdade muito menor.) Por conseguinte sabemos que

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}. \tag{2.3}$$

Esses limitantes estão muito distantes um do outro; para $n = 10$, o limitante inferior é $2^9 = 512$, enquanto que o limitante superior é 10^9 (um bilhão).

Aqui está uma questão que não é respondida pelos limitantes simples em (2.3). Qual é maior, $n!$ ou 2^n? Em outras palavras, um conjunto com n elementos tem mais permutações ou mais subconjuntos? Para valores pequenos de n, subconjuntos estão vencendo: $2^1 = 2 > 1! = 1$, $2^2 = 4 > 2! = 2$, $2^3 = 8 > 3! = 6$. Mas aí a figura muda: $2^4 = 16 < 4! = 24$, $2^5 = 32 < 5! = 120$. É fácil ver que quando n aumenta, $n!$ cresce muito mais rápido que 2^n: se passarmos de n para $n+1$, então 2^n cresce por um fator de 2, enquanto que $n!$ cresce por um fator de $n + 1$.

2.14 Use indução para tornar preciso o argumento anterior, e prove que $n! > 2^n$ se $n \geq 4$.

Existe uma fórmula que dá uma aproximação muito boa de $n!$. Vamos enunciá-la sem prova, pois a prova (embora não terrivelmente difícil) requer cálculo.

Teorema 2.2.1 (Fórmula de Stirling)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Aqui $\pi = 3,14\ldots$ é a área do círculo com raio unitário, $e = 2,718\ldots$ é a base do logaritmo natural, e $\sim$ significa igualdadde aproximada no sentido preciso de que

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Todos esses dois números irracionais esquisitos e e π ocorrem na mesma fórmula!

Vamos voltar à questão: quantos dígitos tem 100!? Sabemos pela Fórmula de Stirling que

$$100! \approx (100/e)^{100} \cdot \sqrt{200\pi}.$$

O número de dígitos desse número é seu logaritmo, na base 10, arredondado. Por conseguinte obtemos

$$\lg(100!) \approx 100 \lg(100/e) + 1 + \lg \sqrt{2\pi} = 157,969\ldots$$

Logo, o número de dígitos em 100! é cerca de 158 (esse é na verdade o valor correto).

2.3 Inclusão-exclusão

Numa turma de 40, muitos estudantes estão colecionando as fotografias de seus astros de rock favoritos. 18 estudantes têm a fotografia dos Beatles, 16 estudantes têm a fotografia dos Rolling Stones e 12 estudantes têm a fotografia de Elvis Presley (isso aconteceu há um tempão atrás, quando éramos jovens). Existem 7 estudantes que têm fotografias de ambos Beatles e Rolling Stones, 5 estudantes têm as fotografias de ambos Beatles e Elvis Presley, e 3 estudantes têm fotografias de ambos Rolling Stones e Elvis Presley. Finalmente existem 2 estudantes que possuem fotografias de todos os três grupos. Pergunta: quantos estudantes na turma não têm fotografia de nenhum dos grupos de rock?

Primeiro podemos tentar argumentar da seguinte forma: existem 40 estudantes no total na turma, remova daí $18 + 16 + 12$. Obtemos -6; esse número negativo nos avisa que deve haver algum erro em nosso cálculo; mas o que é que não estava correto? Cometemos um erro quando subtraímos duas vezes o número daqueles estudantes que colecionavam as fotografias de dois grupos. Por exemplo, um estudante tendo Beatles e Elvis Presley foi subtraído com os colecionadores dos Beatles assim como com os colecionadores de Elvis Presley. Para corrigir nossos cálculos, temos que adicionar de volta o número daqueles estudantes que têm fotografias de dois grupos. Dessa forma obtemos $40 - (18 + 16 + 12) + (7 + 5 + 3)$. Mas temos que ter cuidado, não deveríamos cometer o mesmo erro novamente! O que aconteceu aos 2 estudantes que têm as fotografias de todos os três grupos? Subtraímos esses 3 vezes no início, e aí os adicionamos de volta 3 vezes, de modo que temos que subtraí-los uma vez mais! Com essa correção, nosso resultado final é:

$$40 - (18 + 16 + 12) + (7 + 5 + 3) - 2 = 7. \qquad (2.4)$$

Não podemos encontrar qualquer erro nessa fórmula, olhando para ela de qualquer que seja a direção. Mas, aprendendo de nossa experiência anterior, temos que ser muito mais cuidadosos: temos que dar uma prova exata.

Portanto suponha que alguém registra dados de coleção de cartões da turma em uma tabela como a Tabela 2.1 abaixo. Cada linha corresponde a um estudante; não colocamos todas as 40 linhas, mas somente umas poucas linhas típicas.

A tabela é um pouco tola (mas com razão). Primeiro, damos um bônus de 1 a cada estudante. Segundo, registramos em uma coluna separada se o estudante está colecionando (digamos) Beatles e Elvis Presley, muito embora isso poderia ser obtido das colunas anteriores. Terceiro, colocamos um -1 em colunas registrando o fato de colecionar um número ímpar de fotografias, e um 1 nas colunas registrando o fato de colecionar um número par de fotografias.

Nome	Bônus	Beatles	Stones	Elvis	BS	BE	SE	BSE
Al	1	0	0	0	0	0	0	0
Bel	1	-1	0	0	0	0	0	0
Cy	1	-1	-1	0	1	0	0	0
Di	1	-1	0	-1	0	1	0	0
Ed	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
$\vdots$								

Tabela 2.1: Estranho registro de quem está colecionando fotos de quem

Calculamos a soma total de entradas nessa tabela de duas maneiras diferentes. Primeiro, quais são as somas das linhas? Nas linhas da tabela que são mostradas acima, obtemos 1 para Al e 0 para o resto. Isso não é uma coincidência. Se consideramos um estudante como Al, que não tem qualquer fotografia, então esse estudante contribui para a coluna do bônus, mas para mais nada, o que significa que a soma na linha desse estudante é 1. A seguir, considere, digamos, Ed, que tem todas as 3 fotografias. Ele tem um 1 na coluna de bônus; nas próximas 3 colunas ele tem 3 termos que são -1. Nas próximas 3 colunas ele tem 3 1's, um para cada par de fotografias; é melhor pensar nesses 3 como $\binom{3}{2}$. Essa linha termina com $\binom{3}{3}$ -1's ($\binom{3}{3}$ é igual a 1, mas escrevendo-a dessa maneira a idéia geral pode ser vista melhor). Logo, a soma da linha é

$$1 - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0.$$

Olhando para as linhas de Bel, Cy e Di, vemos que sua soma é

$$1 - \binom{1}{1} = 0 \qquad \text{para Bel (1 fotografia),}$$
$$1 - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 0 \qquad \text{para Cy e Di (2 fotografias).}$$

Se movermos os termos negativos para o outro lado dessas equações, obtemos uma equação com um significado combinatório: *o número de subconjuntos de um conjunto de n-elementos com um número par de elementos é o mesmo que o número de subconjuntos com um número ímpar de elementos*. Por exemplo,

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{3}.$$

Recordemos que o exercício 1.24 assevera que isso é de fato o caso para todo $n \geq 1$.

Como a soma da linha é 0 para todos aqueles estudantes que têm alguma fotografia de qualquer que seja o grupo musical, e é 1 para aqueles não tendo fotografia alguma, a soma de todas as 40 somas das linhas dá exatamente o número daqueles estudantes não tendo fotografia alguma.

Por outro lado, quais são as somas das colunas? Na columa do “bonus”, temos 40 vezes $+1$; na columa dos “Beatles”, temos 18 vezes -1, então temos 16 e 12 vezes -1. Além do mais, obtemos 7 vezes $+1$ na coluna do BS, então 5 e 3 vezes +1. Finalmente, obtemos 2(dois) -1’s na última coluna. Logo, essa é de fato a expressão em (2.4).

Essa fórmula é chamada de *Fórmula da Inclusão-Exclusão* ou *Fórmula do Crivo*. A origem do primeiro nome é óbvia; o segundo se refere à imagem de que começamos com um grande conjunto de objetos e então ”passamos um crivo”sobre aqueles objetos que não desejamos contar.

Poderíamos estender esse método se ao invés de 3, os estudantes estivessem colecionando fotografias de 4, ou 5, ou qualquer número de grupos de rock. Ao invés de enunciar um teorema geral (que seria demorado), damos um número de exercícios e exemplos.

2.15 Há uma classe em que todos são rapazes. Existem 18 rapazes que gostam de jogar xadrez, 23 gostam de jogar futebol, 21 gostam de ciclismo e 17 gostam de alpinismo. O número daqueles que gostam de jogar xadrex e futebol é 9. Existem 7 rapazes que gostam de jogar xadrez e de ciclismo, 6 rapazes que gostam de xadrez e alpinismo, 12 deles gostam de futebol e de ciclismo, 9 rapazes gostam de futebol e de alpinismo, e finalmente 12 deles gostam de ciclismo e de alpinismo. Existem 4 rapazes que gostam de xadrez, futebol e ciclismo, 3 que gostam de xadrez, futebol e alpinismo, 5 que gostam de xadrez, ciclismo e alpinismo, e 7 que gostam de futebol, ciclismo e alpinismo. Finalmente, existem 3 rapazes que gostam de todas as quatro atividades. Adicionalmente, sabemos que todo mundo gosta de alguma dessas atividades. Quantos rapazes existem na classe?

2.4 Casas de Pombo

Será que podemos achar em Nova Iorque duas pessoas tendo o mesmo número de fios de cabelo? Poder-se-ia pensar que é impossível responder essa pergunta, pois não se sabe sequer quantos fios de cabelo existe na própria cabeça, imagine sobre o número de fios de cabelo na cabeça de toda pessoa vivendo em Nova Iorque (cujo número exato é por si só um tanto difícil de determinar). Mas existem alguns fatos que sabemos com segurança: ninguém tem mais que 500000 fios de cabelo (uma observação científica), e não há mais que 10 milhões de habitantes em Nova Iorque. Podemos agora responder nossa pergunta original? Sim. Se não houvesse duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo, então haveria no máximo uma pessoa tendo 0 fios, no máximo uma pessoa tendo exatamente 1 fio, e assim por diante, finalmente haveria no máximo uma pessoa tendo exatamente 500000 fios. Mas, então isso significa que existem não mais que 500001 habitantes em Nova Iorque. Como isso contradiz o que sabemos sobre Nova Iorque, segue que tem que haver duas pessoas tendo o mesmo número de fios de cabelo.[1]

Podemos formular nossa solução da seguinte maneira. Imagine 500001 caixas enormes (ou casas de pombo). A primeira é rotulada “Nova-Iorquinos tendo 0 fios

[1]Existe uma característica interessante desse argumento: terminamos sabendo que duas tais pessoas existem, sem sermos capazes de encontrar essas pessoas. (Mesmo se suspeitarmos que duas pessoas tenham o mesmo número de fios de cabelo, é essencialmente impossível verificar por que isso é de fato assim.) Tais provas em matemática são chamadas *provas de pura existência*.

de cabelo”, a segunda é rotulada “Nova-Iorquinos tendo 1 fio de cabelo”, e assim por diante. A última tem o rótulo “Nova-Iorquinos tendo 500000 fios de cabelo”. Agora se todo mundo vai para a caixa certa, então cerca de 10 milhões de Nova-Iorquinos são corretamente associados a alguma caixa (ou casa). Como temos apenas 500001 caixas, certamente haverá uma caixa contendo mais que um Nova-Iorquino. Esse enunciado é óbvio, mas é muito frequentemente uma ferramenta poderosa, portanto formulamos em completa generalidade:

Se temos n caixas e nelas colocamos mais que n objetos, então haverá pelo menos uma caixa que contém mais que um objeto.

Muito frequentemente o enunciado acima é formulado usando pombos e casas, e é referenciado como o *Princípio da Casa-de-Pombos*.. O Princípio da Casa-de-Pombos é de fato simples: todo mundo o entende imediatamente. Entretanto, ele merece um nome, pois o usamos muito frequentemente como a ferramenta básica de muitas provas. Veremos muitos exemplos para o uso do Princípio da Casa-de-Pombos, mas para lhe mostrar sua força, discutimos um deles imediatamente. Esse não é um teorema de qualquer significância; ao contrário, um exercício cuja solução é dada em detalhe.

Exercício. *Damos 50 tiros num alvo com forma de quadrado, cujo lado é de 70cm de comprimento: somos atiradores um tanto bons, pois todos os nossos tiros atingem o alvo. Prove que existem dois tiros que estão mais próximos que 15 cm.*

Solução: Imagine que nosso alvo é um velho tabuleiro de xadrez. Uma linha e uma coluna desse tabuleiro caíram, portanto ele tem 49 quadrados. O tabuleiro recebeu 50 tiros, logo tem que haver um quadrado que recebeu pelo menos dois tiros. Afirmamos que esses dois tiros estão mais próximos um ao outro que 15cm.

O lado do quadrado é obviamente 10cm, as suas diagonais são iguais, e (do teorema de Pitágoras) seu comprimento é $\sqrt{200} \approx 14,1$cm. Mostramos que

$(*)$ *os dois tiros não podem estar a uma distância maior que a diagonal.*

É intuitivamente claro que dois dos pontos no quadrado à maior distância são as extremidades de uma das diagonais, mas intuição pode ser ilusória; vamos provar isso. Suponha que dois pontos P e Q estão mais distantes um do outro que o comprimento da diagonal. Sejam A, B, C e D os vértices do quadrado. Conecte P e Q por uma linha, e sejam P' e Q' os dois pontos onde essa linha intersecta a fronteira do quadrado (Figura 2.2). Então a distância de P' e Q' é ainda maior, portanto é também maior que a diagonal.

Podemos assumir sem perda de generalidade que P' está sobre o lado AB (se esse não for o caso, trocamos os nomes dos vértices). Um dos ângulos $Q'P'A$ e $Q'P'B$ é pelo menos 90°; podemos assumir (novamente sem perda de generalidade), que $Q'P'A$ é esse ângulo. Então o segmento AQ' é a aresta do triângulo $Q'P'A$ oposto ao maior ângulo, e portanto é ainda maior que $P'Q'$, e portanto ele é maior que a diagonal.

Repetimos esse argumento para mostrar que se substituirmos Q' por uma das extremidades do lado onde ele se encontra, obtemos um segmento que é maior que a diagonal. Mas agora temos um segmento cujas ambas as extremidades são vértices do quadrado. Portanto esse segmento é um lado ou uma diagonal do quadrado, e em nenhum dos casos é maior que a diagonal! Essa contradição mostra que a asserção $(*)$ acima tem que ser verdadeira.

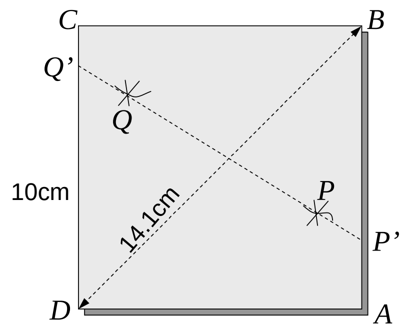

Figura 2.2: Dois tiros no mesmo quadrado

Portanto obtivemos não apenas que haverá dois tiros que estão mais próximos que 15cm, mas até mais próximos que 14,2cm. Isso conclui a solução do exercício.

Se essa é a primeira vez que você viu esse tipo de prova, você pode estar surpreso: não argumentamos diretamente para provar o que desejamos, mas, ao contrário, assumimos que a asserção não era verdadeira, e então usando essas suposições adicionais, argumentamos até que obtivemos uma contradição. Essa forma de prova é chamada de *indireta*, e é um tanto frequentemente usada no raciocínio matemático, como veremos em todo este livro. (Os matemáticos são criaturas estranhas, pode-se observar: eles entram em longos argumentos baseados em suposições que eles sabem que são falsas, e seus momentos mais felizes são quando eles encontram uma contradição entre enunciados que eles provaram.)

2.16 Prove que podemos selecionar 20 Nova-Iorquinos tal que todos têm o mesmo número de fios de cabelo.

2.5 O paradoxo gêmeo e o velho e bom logaritmo

Tendo ensinado o Princípio da Casa-de-Pombos a sua turma, o Professor decide jogar um joguinho: "Aposto que existem dois de vocês que têm o mesmo aniversário! Que vocês acham?" Vários estudantes respondem imediatamente: "Existem 366 aniversários possíveis, portanto você poderia apenas concluir isso se existissem pelo menos 367 de nós na turma! Mas somos apenas 50, e portanto você perderia a aposta." Entretanto, o professor insiste em apostar, e ele vence.

Como podemos explicar isso? A primeira coisa a se dar conta é que o Princípio da Casa-de-Pombos nos diz que com 367 alunos na turma, o professor *sempre* vence a aposta. Mas isso não é interessante do ponto de vista de apostas; é suficiente para ele que ele tenha uma boa chance de vencer. Com 366 alunos, ele pode já perder; poderia acontecer que com apenas 50 alunos, ele ainda tenha uma boa chance de vencer?

A surpreendente resposta é que mesmo com tão poucos como 23 alunos, sua chance de vencer é um pouco maior que 50%. Podemos ver esse fato como um "Princípio

Probabilístico da Casa-de-Pombos", mas o nome usual para ele é o *Paradoxo Gêmeo*.

Vamos tentar determinar as chances do professor. Suponha que na lista da turma, ele escreva o aniversário de todo mundo. Portanto ele tem uma lista de 50 aniversários. Sabemos da seção 1.5 que existem 366^{50} listas diferentes desse tipo.

Para quantas dessas listas ele perde? Novamente, já sabemos a resposta da seção 1.7: $366 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 317$. Portanto a probabilidade de que ele perca a aposta é[2]

$$\frac{366 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 317}{366^{50}.}$$

Com algum esforço, poderíamos calcular esse valor "pela força bruta", usando um computador (ou simplesmente uma calculadora programável), mas será muito mais útil obter limitantes superiores e inferiores por um método que funcionará num caso mais geral, quando temos n possíveis aniversários e k alunos. Em outras palavras, quão grande é o quociente

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\ ?$$

Será mais conveniente tomar a recíproca (que é então maior que 1):

$$\frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}. \tag{2.5}$$

Podemos simplificar essa fração por n, mas então não existe uma maneira óbvia de continuar. Uma pequena dica pode ser a que diz que o número de fatores é o mesmo no numerador e no denominador, portanto vamos tentar escrever essa fração como um produto:

$$\frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-k+1}.$$

Esses fatores são bastante simples, mas é ainda difícil ver quão grande é seu produto. Os fatores individuais são maiores que 1, mas (pelo menos no início) bem próximos a 1. Mas existem muitos deles, e seu produto pode ser grande.

A seguinte idéia ajuda: tome o logaritmo![3] Obtemos

$$\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\right) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n-2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n}{n-k+1}\right). \tag{2.6}$$

[2]Aqui fizemos a suposição implícita de que todas as 366^{50} listas de aniversários são igualmente prováveis. Isso certamente não é verdadeiro; por exemplo, listas contendo 29 de Fevereiro são claramente muito menos prováveis. Existem também variações muito menores entre os outros dias. Pode ser mostrado, entretanto, que essas variações apenas ajudam o professor, tornando coincidências de aniversários mais prováveis.

[3]Afinal de contas, logaritmo foi inventado no século XVII por Buergi e Napier para tornar a multiplicação mais fácil, transformando-a em adição.

(Naturalmente, tomamos o logaritmo natural, base $e = 2,71828\ldots$.) Dessa maneira, podemos lidar com adição ao invés de multiplicação, o que é ótimo; mas os termos que temos que somar tornam-se muito mais feios! Que sabemos sobre esses logaritmos?

Vamos olhar para o gráfico da função logaritmo (Figura 2.3). Desenhamos também a reta $y = x - 1$. Vemos que a função está abaixo da reta, e a toca no ponto $x = 1$

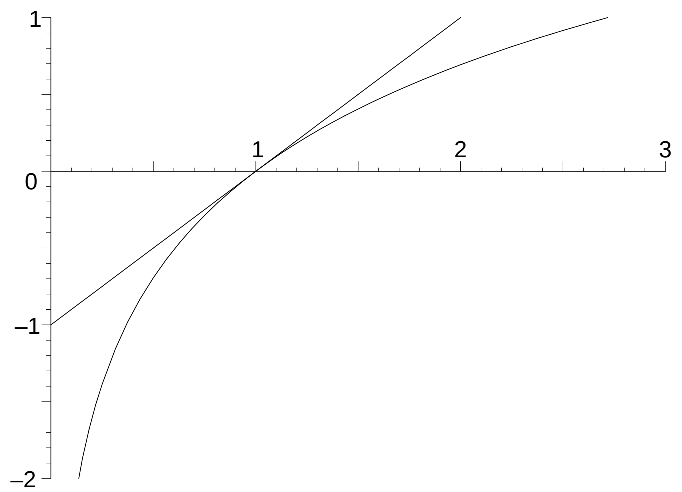

Figura 2.3: O gráfico da função logaritmo natural. Note que próximo a 1, ele está muito próximo à reta $x - 1$.

(esses fatos podem ser provados usando cálculo realmente elementar). Portanto temos

$$\ln x \leq x - 1. \tag{2.7}$$

Podemos dizer algo sobre quão bom é esse limitante superior? Da figura, vemos que pelo menos para valores de x próximos a 1, os dois gráficos são bem próximos. De fato, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\ln x = -\ln\frac{1}{x} \geq -\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{x-1}{x}. \tag{2.8}$$

Se x é um pouco maior que 1 (como são os valores que temos em (2.6), então $\frac{x-1}{x}$ é apenas um pouco menor que $x - 1$, e portanto o limitante superior em (2.7) e o limitante inferior (2.8) são bem próximos.

Esses limitantes sobre a função logaritmo são muito úteis em muitas aplicações nas quais temos que fazer cálculos aproximados com logaritmos, e vale a pena enunciá-los em um lema separado. (Um lema é um enunciado matemático preciso, tal qual um teorema, exceto que ele não é propriamente o objetivo, mas sim algum resultado auxiliar usado no decorrer da prova de um teorema. É claro que alguns lemas são mais interessantes que alguns teoremas!)

Lemma 2.5.1 *Para todo* $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

Primeiro, usamos o limitante inferior nesse lema para estimar (2.6) por baixo. Para um termo típico na soma em (2.6) obtemos

$$\ln\left(\frac{n}{n-j}\right) \geq \frac{\frac{n}{n-j} - 1}{\frac{n}{n-j}} = \frac{j}{n},$$

e portanto

$$\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\right) \geq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{k-1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + (k-1)) = \frac{k(k-1)}{2n}$$

(lembre-se do problema de Gauss!). Por conseguinte temos um limitante inferior simples sobre (2.6). Para obter um limitante superior, podemos usar a outra desigualdade no Lema 2.5.1; para um termo típico, obtemos

$$\ln\left(\frac{n}{n-j}\right) \leq \frac{n}{n-j} - 1 = \frac{j}{n-j}.$$

Temos que somar esses para $j = 1, \dots, k-1$ para obter um limitante superior sobre (2.6). Isso não é tão fácil quanto no caso de Gauss, pois o denominador está mudando. Mas, apenas desejamos um limitante superior, portanto poderíamos substituir o denominador pelo menor valor que ele pode ter por vários valores de j, a saber $n - k + 1$. Temos $j/(n-j) \leq j/(n-k+1)$, e portanto

$$\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\right) \leq \frac{1}{n-k+1} + \frac{2}{n-k+1} + \dots + \frac{k-1}{n-k+1}$$
$$= \frac{1}{n-k+1}(1 + 2 + \dots + (k-1)) = \frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}.$$

Por conseguinte, temos esses limitantes superiores e inferiores semelhantes para o logaritmo da fração (2.5), e aplicando a função exponencial a ambos os lados, obtemos o seguinte:

$$e^{\frac{k(k-1)}{2n}} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \leq e^{\frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}} \tag{2.9}$$

Voltando ao truque na sala de aula, temos que aplicar isso com $n = 366$ e $k = 50$; usando nossa calculadora, obtemos

$$28,4 \leq \frac{366^{50}}{366 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 317} \leq 47,7$$

(Usando mais cálculos, podemos determinar que o valor exato é $33,414\ldots$.) Portanto a probabilidade de que todos os alunos na turma tenham aniversários diferentes (que é o inverso desse número) é menor que $1/28$. Isso significa que se o professor realiza esse truque todo ano, ele vai errar uma ou duas vezes em toda a sua carreira!

Exercícios de Revisão

2.17 Qual é o resultado da seguinte soma?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

Experimente, conjecture o valor (ou fórmula), e então prove-o por indução.

2.18 Qual é o resultado da seguinte soma?

$$0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\cdot\binom{n}{n-1}+n\cdot\binom{n}{n}.$$

Experimente, conjecture o valor (ou fórmula), e então prove. (Tente provar o resultado por indução e também por argumentos combinatórios.)

2.19 Prove as seguintes identidades

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)2^n+1.$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}.$$

2.20 Prove (por indução sobre n) que
(a) n^2-1 é um múltiplo de 4 se n for ímpar,
(b) n^3-n é um múltiplo de 6 para todo n.

2.21 Há uma turma de 40 garotas. Existem 18 garotas que gostam de jogar xadrex, 23 que gostam de jogar futebol. Várias delas gostam de ciclismo. O número daquelas que gostam de jogar tanto xadrez quanto futebol é 9. Existem 7 garotas que gostam de xadrex e ciclismo, 12 delas gostam de futebol e ciclismo. Existem 4 garotas que gostam de todas as três atividades. Adicionalmente, sabemos que todas gostam de alguma dessas atividades. Quantas garotas gostam de ciclismo?

2.22 Há uma turma toda composta de rapazes. Sabemos que existem a rapazes que gostam de jogar xadrez, b gostam de jogar futebol, c gostam de ciclismo e d gostam de montanhismo. O número daqueles que gostam de jogar tanto xadrez quanto futebol é x. Existem y rapazes que gostam de xadrez e ciclismo, z rapazes que gostam de xadrez e montanhismo, u deles gostam de futebol e ciclismo, v rapazes gostam de futebol e montanhismo, e finalmente w deles gostam de ciclismo e montanhismo. Não sabemos quantos rapazes gostam de, e.g., xadrez, futebol e montanhismo, mas sabemos que todos gostam de alguma dessas atividades. Gostaríamos de saber quantos rapazes existem na turma.

(a) Mostre por meio de um exemplo que isso não está determinado pelo que sabemos.

(b) Prove que podemos pelo menos concluir que o número de rapazes na turma é no máximo $a+b+c+d$, e no mínimo $a+b+c+d-x-y-z-u-v-w$.

2.23 Selecionamos 38 inteiros positivos pares, todos menores que 1000. Prove que haverá dois deles cuja diferença é no máximo 26.

2.24 Uma gaveta contém 6 pares de meias pretas, 5 pares de meias brancas, 5 pares de meias vermelhas e 4 pares de meias verdes.

(a) Quantas meias soltas (i.e., sem contar o respectivo par) temos que tirar para ter certeza de que tiramos duas meias da mesma cor?

(b) Quantas meias soltas temos que tirar para ter certeza de que tiramos duas meias de cores diferentes?