

Notas sobre Definições Recursivas (1)
Anjolina Grisi de Oliveira

1 A torre de Hanói

Jogo antigo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. O brinquedo consiste de três pinos fixos numa base comum. Em um dos pinos são empilhados oito discos por tamanho decrescente.

Objetivo do jogo

Transferir a torre inteira para um dos outros pinos.

Regras

- Mover apenas um disco de cada vez;
- nunca colocar um disco maior em cima de um disco menor.

Lenda

O matemático anexou ao seu brinquedo uma lenda sobre uma torre muito maior, chamada *Torre de Brama*. Ela tem 64 discos de ouro puro empilhados em três pinos de diamantes. No início dos tempos, Deus colocou esses discos de ouro no primeiro pino e mandou um grupo de sacerdotes transferí-los para um outro pino seguindo as regras acima descritas. Quando os sacerdotes terminarem essa tarefa, a torre ruirá e o mundo acabará.

Pergunta

- Quantos movimentos são necessários para mover uma torre com n discos?

2 Definições recursivas

- O ITEM QUE ESTÁ SENDO DEFINIDO APARECE COMO PARTE DA DEF.
- TAMBÉM CHAMADA DE **DEF. INDUTIVA**.
- As definições recursivas são compostas de duas partes:

1. BASE: onde alguns casos simples do item que está sendo definido são dados explicitamente; e
2. PASSO INDUTIVO ou RECURSIVO: onde outros casos do item que está sendo definido são dados em função dos casos anteriores

Usamos para definir:

- Funções e Operações;
- ALGORITMOS;
- CONJUNTOS;
- SEQUÊNCIAS.

3 Funções e Operações

Exemplo 1 *Encontre $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ se $f(n)$ é definida recursivamente por:*

- $f(0) = 1$;
- para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ temos:
 1. $f(n + 1) = f(n) + 2$
 2. $f(n + 1) = 3f(n)$
 3. $f(n + 1) = 2^{f(n)}$
 4. $f(n + 1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

Exemplo 2 *Forneça uma definição recursiva para a função fatorial $F(n) = n!$.*

Exemplo 3 *Considere a operação de exponenciação a^n , definida para um número real a diferente de zero e n inteiro não negativo. A definição recursiva para essa operação é dada a seguir:*

1. $a^0 = 1$
2. $a^n = (a^{n-1} \cdot a)$

4 ALGORITMOS

Exemplo 4 *Defina um algoritmo recursivo para calcular o fatorial de um número.*

Exemplo 5 *Defina um algoritmo recursivo para calcular a soma dos n primeiros números inteiros pares e positivos.*

5 CONJUNTOS

Exemplo 6

1. $2 \in A$
2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Exemplo 7 Cadeias de símbolos obtidas a partir de um alfabeto finito são objetos geralmente utilizados em computação. Exemplos: cadeias de bits (alfabeto = $\{0, 1\}$), cadeias alfanuméricas usadas como identificadores em uma determinada linguagem de programação, etc. O conjunto de todas as cadeias de tamanho finito sobre um alfabeto A , geralmente denotado por A^* , é definido recursivamente como a seguir:

1. A cadeia vazia (ε) $\in A^*$;
2. Todo elemento de A pertence a A^* ;
3. Se x e y pertencem a A^* então a concatenação xy também pertence a A^* .

Exemplo 8 Forneça uma definição recursiva para o conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho finito que são **palíndromos**.

1. ε , 0 e 1 são palíndromos;
2. Se x é palíndromo então $0x0$ e $1x1$ também são palíndromos.

Exemplo 9 Em uma certa linguagem de programação, os identificadores podem ser cadeias alfanuméricas de tamanho arbitrário, mas que devem começar com letra. Uma definição recursiva para o conjunto de identificadores válidos nessa linguagem é dada a seguir:

1. Uma letra é um identificador;
2. Se x é um identificador, então a concatenação de x com qualquer letra ou dígito também é um identificador.

Exemplo 10 FORMA DE BACKUS NAUR (BNF).

Notação usada para definir itens de uma linguagem de programação. Nessa notação os itens definidos estão entre $\langle \text{e} \rangle$. A linha vertical ($|$) indica uma escolha (“ou”).

A BNF de um identificador é dada a seguir:

$$\begin{aligned}\langle \text{identificador} \rangle &::= \langle \text{letra} \rangle | \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{letra} \rangle | \\ &\quad \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{digito} \rangle \\ \langle \text{letra} \rangle &::= a | b | c | \dots | z \\ \langle \text{digito} \rangle &::= 0 | 1 | 2 | \dots | 9\end{aligned}$$

Exemplo 11 O identificador `gv1` é obtido da definição BNF de que forma?

6 SEQUÊNCIAS

Exemplo 12 *Forneça uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ se:*

1. $a_n = 6n$
2. $a_n = 2n + 1$
3. $a_n = 10^n$
4. $a_n = 5$

Exemplo 13 *Sequência de Fibonacci*