Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$. *As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$. *As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*. As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Definição

Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A composição de R e S, denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Exemplo

Encontre $S \circ R$*. Onde* R *é uma relação de* $\{1, 2, 3\}$ *em* $\{1, 2, 3, 4\}$*.* S *é uma relação de* $\{1, 2, 3, 4\}$ *em* $\{0, 1, 2\}$*. E, as relações são dadas a seguir.*

- $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$;
- $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), 94, 1)\}$

Potências de uma relação

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A. As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas indutivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

Exemplo

Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre as potências R^n, $n = 2, 3, 4 \ldots$.

Teorema

A relação R em um conjunto A é transitiva se e somente se $R^n \subseteq R$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

Prova

1. Se $R^n \subseteq R$ então R é transitiva. Essa parte é trivial.
2. Se R é transitiva então $R^n \subseteq R$. Prova feita por indução sobre n.