# Notas sobre Indução (1)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

CIn-UFPE

# Provando teoremas

- Muitos teoremas são da forma $P \rightarrow Q$
- Vamos fazer um resumo das principais técnicas para provar uma sentença da forma $P \rightarrow Q$

# Provando teoremas

- Muitos teoremas são da forma $P \rightarrow Q$
- Vamos fazer um resumo das principais técnicas para provar uma sentença da forma $P \rightarrow Q$

# Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \to Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

# Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

# Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \longrightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

# Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \longrightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

# Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \longrightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

# Prova direta

- Suponha $P$, deduza $Q$;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se $x$ é um inteiro par e $y$ é um inteiro par, então o produto $xy$ é um inteiro par.

# Prova direta

- Suponha $P$, deduza $Q$;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se $x$ é um inteiro par e $y$ é um inteiro par, então o produto $xy$ é um inteiro par.

# Prova direta

- Suponha $P$, deduza $Q$;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se $x$ é um inteiro par e $y$ é um inteiro par, então o produto $xy$ é um inteiro par.

# Prova direta

- Suponha $P$, deduza $Q$;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se $x$ é um inteiro par e $y$ é um inteiro par, então o produto $xy$ é um inteiro par.

# Prova direta

- Suponha $P$, deduza $Q$;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se $x$ é um inteiro par e $y$ é um inteiro par, então o produto $xy$ é um inteiro par.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n+1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n+1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

**Exemplo** Se $n+1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

**Prova** Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n+1$ senhas.

# Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que $P$.

Exemplo Se $n+1$ senhas forem distribuídas a $n$ alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n+1$ senhas.

# Prova por absurdo

- Negue $P \to Q$;
- Logo, você supõe que $P \land \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \to Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo: Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \longrightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \longrightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

**Exemplo** Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

**Exemplo** Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \to Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \to Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \land \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

**Exemplo** Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

**Exemplo** Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \to Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \to Q$ é provado.

**Exemplo** Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

# Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

# Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

# Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

# Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus e as seguintes premissas:
  1. Você pode subir o primeiro degrau;
  2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

# Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus e as seguintes premissas:
  1. Você pode subir o primeiro degrau;
  2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

# Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus e as seguintes premissas:
  1. Você pode subir o primeiro degrau;
  2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

# Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus e as seguintes premissas:
    1. Você pode subir o primeiro degrau;
    2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

# Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus e as seguintes premissas:
  1. Você pode subir o primeiro degrau;
  2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau)*
  2. $P(k) \to P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau)*;
  2. $P(k) \to P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau)*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau)*;
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau $n$.** Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \to P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade $P$ específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que $n$ sendo inteiro tem a propriedade $P$.
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau** $n$. Assim formalizamos as duas premissas:
  1. $P(1)$ *(posso subir o primeiro degrau);*
  2. $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *(se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)*

# O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos $n$ nós temos $P(n)$?
  1. **Passo básico ou base da indução**: Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
  2. **Passo indutivo**: Provamos $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Como?
     1. Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
     2. Provamos que $P(k+1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, $n$ inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

# O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos $n$ nós temos $P(n)$?
  1. **Passo básico ou base da indução**: Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
  2. **Passo indutivo**: Provamos $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Como?
     1. Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
     2. Provamos que $P(k+1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, $n$ inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

# O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos $n$ nós temos $P(n)$?
  1. **Passo básico ou base da indução**: Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
  2. **Passo indutivo**: Provamos $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Como?
     1. Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
     2. Provamos que $P(k+1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, $n$ inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

# O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos $n$ nós temos $P(n)$?
  1. **Passo básico ou base da indução**: Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
  2. **Passo indutivo**: Provamos $P(k) \to P(k+1)$. Como?
     1. Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
     2. Provamos que $P(k+1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, $n$ inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

# Exemplos

## Exemplo

*Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a $n^2$.*

## Exemplo

*Prove que para $n \geq 1$, $1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.*

## Exemplo

*Prove que para $n \geq 1$, $2^n > n$.*

# Exemplos

- Nem sempre a base é igual a 1.

**Exemplo**

*Prove que para* $n \geq 4$, $n^2 > 3n$

**Exemplo**

*Prove que para* $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que para qualquer inteiro positivo n, o número* $2^{2n} - 1$ *é divisível por* 3*.*

## Exemplo

*Prove por indução que a soma dos n primeiros inteiros positivos é* $n(n+1)/2$*. (Carl Friedrich Gauss (1777-1855))*

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui $2^n$ elementos.*

Base: Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I.: Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

n+1: Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $\mid A \mid= 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid= n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid= n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid= 2.\mid P(A) \mid= 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $| A |= 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n + 1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $| B |= n + 1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $| A |= n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $| P(B) |= 2.\, | P(A) |= 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

- **Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.
- **H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.
- **n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n + 1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n + 1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ elementos.*

**Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

**H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

**n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$.

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui $2^n$ elementos.*

- **Base** Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.
- **H.I.** Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.
- **n+1** Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$ .

# Exemplos

## Exemplo

*Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui $2^n$ elementos.*

Base Se $\mid A \mid = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

n+1 Precisamos provar que: Se $B$ é um conjunto com $n + 1$ elementos então $P(B)$ tem $2^{n+1}$ elementos.

1. Se $\mid B \mid = n + 1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $\mid A \mid = n$.
2. Para cada subconjunto $S$ de $A$ existem 2 subconjuntos de $B$: $S$ e $S \cup \{b\}$.
3. Logo, $\mid P(B) \mid = 2. \mid P(A) \mid = 2.2^n = 2^{n+1}$ .

# Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de $n$ e fazemos conjecuras para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

# Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de *n* e fazemos conjecuras para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

# Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de $n$ e fazemos conjecuras para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
    - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$