

Notas sobre Definições Recursivas

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

CIn-UFPE

A torre de Hanói

Jogo antigo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. O brinquedo consiste de três pinos fixos numa base comum. Em um dos pinos são empilhados oito discos em ordem decrescente de tamanho.

Objetivo do jogo

Transferir a torre inteira para um dos outros pinos.

- Mover apenas um disco de cada vez;
- nunca colocar um disco maior em cima de um disco menor.

Lenda

O matemático anexou ao seu brinquedo uma lenda sobre uma torre muito maior, chamada *Torre de Brama*. Ela tem 64 discos de ouro puro empilhados em três pinos de diamantes. No início dos tempos, Deus colocou esses discos de ouro no primeiro pino e mandou um grupo de sacerdotes transferí-los para um outro pino seguindo as regras acima descritas. Quando os sacerdotes terminarem essa tarefa, a torre ruirá e o mundo acabará.

Pergunta

- Quantos movimentos são necessários para mover uma torre com n discos?

- O item que está sendo definido aparece como parte da definição.
- Também chamada de **definição indutiva**.
- As definições recursivas são compostas de duas partes:
 - 1 BASE: onde alguns casos simples do item que está sendo definido são dados explicitamente; e
 - 2 PASSO INDUTIVO ou RECURSIVO: onde outros casos do item que está sendo definido são dados em função dos casos anteriores

- O item que está sendo definido aparece como parte da definição.
- Também chamada de **definição indutiva**.
- As definições recursivas são compostas de duas partes:
 - 1 BASE: onde alguns casos simples do item que está sendo definido são dados explicitamente; e
 - 2 PASSO INDUTIVO ou RECURSIVO: onde outros casos do item que está sendo definido são dados em função dos casos anteriores

- O item que está sendo definido aparece como parte da definição.
- Também chamada de **definição indutiva**.
- As definições recursivas são compostas de duas partes:
 - 1 BASE: onde alguns casos simples do item que está sendo definido são dados explicitamente; e
 - 2 PASSO INDUTIVO ou RECURSIVO: onde outros casos do item que está sendo definido são dados em função dos casos anteriores

Para quê usamos as definições recursivas?

- Funções e Operações;
- ALGORITMOS;
- CONJUNTOS;
- SEQUÊNCIAS.

Para quê usamos as definições recursivas?

- Funções e Operações;
- ALGORITMOS;
- CONJUNTOS;
- SEQUÊNCIAS.

Para quê usamos as definições recursivas?

- Funções e Operações;
- ALGORITMOS;
- CONJUNTOS;
- SEQUÊNCIAS.

Para quê usamos as definições recursivas?

- Funções e Operações;
- ALGORITMOS;
- CONJUNTOS;
- SEQUÊNCIAS.

Funções

Exemplo

Encontre $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ se $f(n)$ é definida recursivamente por:

- $f(0) = 1$;
- para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ temos:
 - 1 $f(n + 1) = f(n) + 2$
 - 2 $f(n + 1) = 3f(n)$
 - 3 $f(n + 1) = 2^{f(n)}$
 - 4 $f(n + 1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

Exemplo

Forneça uma definição recursiva para a função fatorial
 $F(n) = n!$.

Operações

Exemplo

Considere a operação de exponenciação a^n , definida para um número real a diferente de zero e n inteiro não negativo. A definição recursiva para essa operação é dada a seguir:

1 $a^0 = 1$

2 $a^n = (a^{n-1} \cdot a)$

Algoritmos

Exemplo

Defina um algoritmo recursivo para calcular o fatorial de um número.

Exemplo

Defina um algoritmo recursivo para calcular a soma dos n primeiros números inteiros pares e positivos.

Algoritmos

Exemplo

Defina um algoritmo recursivo para calcular o fatorial de um número.

Exemplo

Defina um algoritmo recursivo para calcular a soma dos n primeiros números inteiros pares e positivos.

Conjuntos

Exemplo

- 1 $2 \in A$
- 2 *Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$*

Exemplo

Cadeias de símbolos obtidas a partir de um alfabeto finito são objetos geralmente utilizados em computação. Exemplos: cadeias de bits (alfabeto = $\{0, 1\}$), cadeias alfanuméricas usadas como identificadores em uma determinada linguagem de programação, etc. O conjunto de todas as cadeias de tamanho finito sobre um alfabeto A , geralmente denotado por A^ , é definido recursivamente como a seguir:*

- 1 A cadeia vazia (ϵ) $\in A^*$;
- 2 Todo elemento de A pertence a A^* ;
- 3 Se x e y pertencem a A^* então a concatenação xy também pertence a A^* .

Exemplo

Forneça uma definição recursiva para o conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho finito que são **palíndromos**.

- 1 ϵ , 0 e 1 são palíndromos;
- 2 Se x é palíndromo então $0x0$ e $1x1$ também são palíndromos.

Exemplo

Forneça uma definição recursiva para o conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho finito que são **palíndromos**.

- 1 ϵ , 0 e 1 são palíndromos;
- 2 Se x é palíndromo então $0x0$ e $1x1$ também são palíndromos.

Exemplo

Forneça uma definição recursiva para o conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho finito que são **palíndromos**.

- 1 ϵ , 0 e 1 são palíndromos;
- 2 Se x é palíndromo então $0x0$ e $1x1$ também são palíndromos.

Exemplo

Em uma certa linguagem de programação, os identificadores podem ser cadeias alfanuméricas de tamanho arbitrário, mas que devem começar com letra. Uma definição recursiva para o conjunto de identificadores válidos nessa linguagem é dada a seguir:

- 1 *Uma letra é um identificador;*
- 2 *Se x é um identificador, então a concatenação de x com qualquer letra ou dígito também é um identificador.*

Exemplo

FORMA DE BACKUS NAUR (BNF).

Notação usada para definir itens de uma linguagem de programação. Nessa notação os itens definidos estão entre $\langle \rangle$. A linha vertical ($|$) indica uma escolha (“ou”).

A BNF de um identificador é dada a seguir:

$$\langle \text{identificador} \rangle ::= \langle \text{letra} \rangle \mid \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{letra} \rangle \mid \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{digito} \rangle$$

$$\langle \text{letra} \rangle ::= a \mid b \mid c \mid \dots \mid z$$

$$\langle \text{digito} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9$$

Exemplo

O identificador gv1 é obtido da definição BNF de que forma?

Exemplo

FORMA DE BACKUS NAUR (BNF).

Notação usada para definir itens de uma linguagem de programação. Nessa notação os itens definidos estão entre $\langle \rangle$. A linha vertical ($|$) indica uma escolha (“ou”).

A BNF de um identificador é dada a seguir:

$$\langle \text{identificador} \rangle ::= \langle \text{letra} \rangle \mid \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{letra} \rangle \mid \langle \text{identificador} \rangle \langle \text{digito} \rangle$$

$$\langle \text{letra} \rangle ::= a \mid b \mid c \mid \dots \mid z$$

$$\langle \text{digito} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9$$

Exemplo

O identificador gv1 é obtido da definição BNF de que forma?

Exemplo

Forneça uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ se:

① $a_n = 6n$

② $a_n = 2n + 1$

③ $a_n = 10^n$

④ $a_n = 5$

Exemplo

Sequência de Fibonacci