Notas sobre Conjuntos(2)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

CIn-UFPE

Operações Básicas

Definição (União)

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão ou em A ou em B, ou em ambos.

- $A \cup B : \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Operações Básicas

Definição (Interseção)

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A interseção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo.

- $A \cap B : \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- princípio da inclusão-exclusão

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- princípio da inclusão-exclusão

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Diferença)

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A diferença entre A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão em A mas não estão em B. A diferença de A e B também é chamada de **complemento de B em relação a** *A.*

- $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$;

Definição (Complemento)

Seja U o conjunto universo. O complemento do conjunto A, denotado por $\bar{A}$ ou por A', é o complemento de A em relação a U. Em outras palavras, o complemento do conjunto A é $U - A$.

- $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: $1a.\ A \cup B = B \cup A$ e $1b.\ A \cap B = B \cap A$
- associatividade: $2a.\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $2b.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: $3a.\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $3b.\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: $4a.\ A \cup \emptyset = A$ e $4b.\ A \cap U = A$
- dominação: $5a.\ A \cup U = U$ e $5b.\ A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: $6a.\ A \cup A' = U$ e $6b.\ A \cap A' = \emptyset$
- complemento: $6c.\ (A')' = A$
- idempotência: $7a.\ A \cup A = A$ e $7b.\ A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: $8a.\ (A \cup B)' = A' \cap B'$ e $8b.\ (A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: $1a.\ A \cup B = B \cup A$ e $1b.\ A \cap B = B \cap A$
- associatividade: $2a.\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $2b.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: $3a.\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $3b.\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: $4a.\ A \cup \emptyset = A$ e $4b.\ A \cap U = A$
- dominação: $5a.\ A \cup U = U$ e $5b.\ A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: $6a.\ A \cup A' = U$ e $6b.\ A \cap A' = \emptyset$
- complemento: $6c.\ (A')' = A$
- idempotência: $7a.\ A \cup A = A$ e $7b.\ A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: $8a.\ (A \cup B)' = A' \cap B'$ e $8b.\ (A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: $1a.\ A \cup B = B \cup A$ e $1b.\ A \cap B = B \cap A$
- associatividade: $2a.\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $2b.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: $3a.\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $3b.\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: $4a.\ A \cup \emptyset = A$ e $4b.\ A \cap U = A$
- dominação: $5a.\ A \cup U = U$ e $5b.\ A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: $6a.\ A \cup A' = U$ e $6b.\ A \cap A' = \emptyset$
- complemento: $6c.\ (A')' = A$
- idempotência: $7a.\ A \cup A = A$ e $7b.\ A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: $8a.\ (A \cup B)' = A' \cap B'$ e $8b.\ (A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: $1a.\ A \cup B = B \cup A$ e $1b.\ A \cap B = B \cap A$
- associatividade: $2a.\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $2b.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: $3a.\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $3b.\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: $4a.\ A \cup \emptyset = A$ e $4b.\ A \cap U = A$
- dominação: $5a.\ A \cup U = U$ e $5b.\ A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: $6a.\ A \cup A' = U$ e $6b.\ A \cap A' = \emptyset$
- complemento: $6c.\ (A')' = A$
- idempotência: $7a.\ A \cup A = A$ e $7b.\ A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: $8a.\ (A \cup B)' = A' \cap B'$ e $8b.\ (A \cap B)' = A' \cup B'$

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$*.*

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$*.*

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.

2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.

3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3. De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.
8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.
9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.
8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.
9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. pela primeira lei de De Morgan inferimos $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

  1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
  2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:
  1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
  2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:
  1. Seja
     $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \;\; e \;\; C = \{0, 3, 6, 9\}.$
     Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?
  2. Seja $A_i = \{i,\ i+1,\ i+2, \ldots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
  3. Seja $A_i = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:
  1. Seja
     $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \;\; e \;\; C = \{0, 3, 6, 9\}.$
     Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?
  2. Seja $A_i = \{i,\ i+1,\ i+2, \ldots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
  3. Seja $A_i = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:
    1. Seja
    $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \;\; e \;\; C = \{0, 3, 6, 9\}$.
    Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?
    2. Seja $A_i = \{i,\; i+1,\; i+2, \ldots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
    3. Seja $A_i = \{1,\; 2,\; 3, \ldots,\; i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

1. Determine se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.
    1. $x \in \{x\}$
    2. $\{x\} \subseteq \{x\}$
    3. $\{x\} \in \{x\}$
    4. $\{x\} \in \{\{x\}\}$
    5. $\emptyset \subseteq \{x\}$
    6. $\emptyset \in \{\{x\}\}$
2. Suponha que A, B e C são conjuntos tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.
3. Encontre um exemplo de dois conjuntos A e B de forma que $A \in B$ e $A \subseteq B$.
4. Determine se cada um dos seguintes conjuntos é o conjunto das partes de algum conjunto.
    1. $\emptyset$
    2. $\{\emptyset, \{a\}\}$
    3. $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

4. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

5. Encontre os conjuntos A e B se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

6. Prove que se A e B são conjuntos então $A - B = A \cap \bar{B}$.

7. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:
    1. $(A \cap B) \subseteq A$
    2. $A - B \subseteq A$
    3. $A \cap (B - A) = \emptyset$
    4. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
    5. $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
    6. $A \cup (B - A) = A \cup B$
    7. $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
    8. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

8. $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ *e* $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ *e portanto pertence a* $P(A \cup B)$, *mas* $\{1, 3\}$ *não pertence nem a* $P(A)$ *e nem a* $P(B)$, *pois* $\{1, 3\} \not\subseteq A$ *e* $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ *e* $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ *e portanto pertence a* $P(A \cup B)$, *mas* $\{1, 3\}$ *não pertence nem a* $P(A)$ *e nem a* $P(B)$, *pois* $\{1, 3\} \not\subseteq A$ *e* $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ *e* $B = \{3\}$. $\{1,3\} \subseteq A \cup B$ *e portanto pertence a* $P(A \cup B)$, *mas* $\{1,3\}$ *não pertence nem a* $P(A)$ *e nem a* $P(B)$, *pois* $\{1,3\} \not\subseteq A$ *e* $\{1,3\} \not\subseteq B$.

$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$. $\{1,3\} \subseteq A \cup B$ e portanto pertence a $P(A \cup B)$, mas $\{1,3\}$ não pertence nem a $P(A)$ e nem a $P(B)$, pois $\{1,3\} \not\subseteq A$ e $\{1,3\} \not\subseteq B$.

1. O que é possível afirmar sobre A e B em cada uma das sentenças abaixo, supondo que cada sentença é verdadeira:
   1. $A \cup B = A$
   2. $A - B = A$
2. Você pode concluir que $A = B$ se A, B e C são conjuntos e $A \cup C = B \cup C$?
3. A **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B, denotada por $A \otimes B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B, mas não em ambos. Com base nessa definição, responda:
   1. Encontre a diferença simétrica entre $\{1, 3, 5\} e \{1, 2, 3\}$.
   2. Desenhe o diagrama de Venn para $A \otimes B$.
   3. Mostre que $A \otimes B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
   4. Mostre que se A é um subconjunto de um conjunto universal U, então:
      1. $A \otimes A = \emptyset$

2. $A \otimes U = \bar{A}$

4. O *sucessor* de um conjunto A é o conjunto $A \cup \{A\}$. Encontre o sucessor dos seguintes conjuntos:
   1. $\{1, 2, 3\}$
   2. $\{\emptyset\}$

5. Em certas situações, o número de vezes que um determinado elemento ocorre em uma coleção não ordenada é relevante para o problema estudado. **Multiconjuntos** são coleções não ordenadas de elementos, onde cada elemento pode ocorrer como membro mais de uma vez. A notação $\{m_1.a_1, m_2.a_2, \ldots, m_r.a_r\}$ denota que no multiconjunto o elemento a_1 ocorre m_1 vezes, o elemento a_2 ocorre m_2 vezes, e assim sucessivamente. Os números m_i são chamados de **multiplicidades** dos elementos a_i, onde $i = 1, 2, \ldots, r$.

Sejam P e Q multiconjuntos. A *união* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é o máximo de suas multiplicidades em P e em Q. A *interseção* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de cada elemento é o mínimo das multiplicidades em P e Q. A *diferença* entre P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a multiplicidade do elemento em P menos sua multiplicidade em Q, a não ser que a diferença seja negativa, nesse caso a multiplicidade é zero. A *soma* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a soma de suas multiplicidades em P e em Q. A *soma* é denotada por $+$. Com base nessas definições, pergunta-se:

1. Sejam A e B os multiconjuntos $\{3.a, 2.b, 1.c\}$ e $\{2.a, 3.b, 4.d\}$, respectivamente. Encontre os multiconjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ e $A + B$.