

Notas sobre Indução (1)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

2007.1 / CIn-UFPE

Provando teoremas

- Muitos teoremas são da forma $P \rightarrow Q$
- Vamos fazer um resumo das principais técnicas para provar uma sentença da forma $P \rightarrow Q$

Provando teoremas

- Muitos teoremas são da forma $P \rightarrow Q$
- Vamos fazer um resumo das principais técnicas para provar uma sentença da forma $P \rightarrow Q$

Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- **Útil apenas para um número finito de casos.**

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.

Exemplo Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Prova direta

- **Suponha P , deduza Q ;**
- Abordagem padrão.

Exemplo Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Prova direta

- Suponha P , deduza Q ;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Prova direta

- Suponha P , deduza Q ;
- **Abordagem padrão.**

Exemplo Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Prova direta

- Suponha P , deduza Q ;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Prova direta

- Suponha P , deduza Q ;
- Abordagem padrão.

Exemplo Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Prova por contraposição

- **Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$**

- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$

- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por contraposição

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- Usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar do que P .

Exemplo Se $n + 1$ senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

Prova Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas $n + 1$ senhas.

Prova por absurdo

- **Negue $P \rightarrow Q$;**
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- **Deduzza uma contradição;**
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Prova por absurdo

- Negue $P \rightarrow Q$;
- Logo, você supõe que $P \wedge \neg Q$ é verdade;
- Deduza uma contradição;
- $P \rightarrow Q$ é provado.

Exemplo Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1 $x + x = x$

2 $x \neq 0$

3 De 1 $2x = x$

4 Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

5 Logo de 4 concluímos uma contradição: $2 = 1$

Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

Intuição

- **Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:**
 - 1 Você pode subir o primeiro degrau;
 - 2 Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:
 - 1 **Você pode subir o primeiro degrau;**
 - 2 Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:
 - 1 Você pode subir o primeiro degrau;
 - 2 Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:
 - 1 Você pode subir o primeiro degrau;
 - 2 Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:
 - 1 Você pode subir o primeiro degrau;
 - 2 Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- **Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?**

Formalizando o nosso exemplo

- **Vamos numerar os degraus: 1,2,3...**
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - ① $P(1)$ (posso subir o primeiro degrau)
 - ② $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (se subo o n -ésimo degrau então subo o próximo)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - $P(1)$ (posso subir o primeiro degrau)
 - $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (se subo o n -ésimo degrau então subo o próximo)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa posso subir o degrau n . Assim formalizamos as duas premissas:
 - $P(1)$ - posso subir o primeiro degrau.
 - $P(n) \rightarrow P(n+1)$ - se eu sei subir o degrau n , posso subir o degrau $n+1$.

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa posso subir o degrau n . Assim formalizamos as duas premissas:

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - $P(1)$ (posso subir o primeiro degrau);
 - $P(k) \rightarrow P(k+1)$ (se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - $P(1)$ (*posso subir o primeiro degrau*);
 - $P(k) \rightarrow P(k+1)$ (*se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo*)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - 1 $P(1)$ (*posso subir o primeiro degrau*);
 - 2 $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ (*se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo*)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - 1 $P(1)$ (*posso subir o primeiro degrau*);
 - 2 $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ (*se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo*)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - 1 $P(1)$ (*posso subir o primeiro degrau*);
 - 2 $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ (*se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo*)

Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: $P(n)$ para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P .
- No nosso caso, $P(n)$ significa **posso subir o degrau n** . Assim formalizamos as duas premissas:
 - 1 $P(1)$ (*posso subir o primeiro degrau*);
 - 2 $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ (*se subo o k -ésimo degrau então subo o próximo*)

O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
 - 1 **Passo básico ou base da indução:** Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
 - 2 **Passo indutivo:** Provamos $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Como?
 - 1 Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
 - 2 Provamos que $P(k+1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, n inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
 - 1 **Passo básico ou base da indução:** Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
 - 2 **Passo indutivo:** Provamos $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. Como?
 - 1 Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
 - 2 Provamos que $P(k + 1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, n inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
 - 1 **Passo básico ou base da indução:** Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
 - 2 **Passo indutivo:** Provamos $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. Como?
 - 1 Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
 - 2 Provamos que $P(k + 1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, n inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
 - 1 **Passo básico ou base da indução:** Provamos $P(1)$. Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
 - 2 **Passo indutivo:** Provamos $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. Como?
 - 1 Assumimos que $P(k)$ é verdade. $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
 - 2 Provamos que $P(k + 1)$ é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, n inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

Exemplos

Exemplo

Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 .

Exemplo

Prove que para $n \geq 1$, $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Exemplo

Prove que para $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exemplos

- Nem sempre a base é igual a 1.

Exemplo

Prove que para $n \geq 4$, $n^2 > 3n$

Exemplo

Prove que para $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$.

Exemplos

Exemplo

Prove que para qualquer inteiro positivo n , o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Exemplo

Prove por indução que a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n + 1)/2$. (Carl Friedrich Gauss (1777-1855))

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma

$B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de

B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exemplos

Exemplo

Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.

Base Se $|A| = 0$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, logo $P(A)$ possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.

H.I. Se A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

$n+1$ Precisamos provar que: Se B é um conjunto com $n+1$ elementos então $P(B)$ tem 2^{n+1} elementos.

1 Se $|B| = n+1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $|A| = n$.

2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B : S e $S \cup \{b\}$.

3 Logo, $|P(B)| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de n e fazemos conjecturas para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
 - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de n e fazemos conjecturas para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
 - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Fazendo conjecturas

- Muitas vezes examinamos os valores de uma expressão para pequenos valores de n e fazemos conjecturas para encontrar uma fórmula.
- Podemos usar o princípio da indução matemática para provar que a nossa conjectura é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Exemplo: encontre uma fórmula para
 - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$