

# Princípio da Inclusão - Exclusão

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática  
Universidade Federal de Pernambuco

2007.1 / CIn-UFPE

## Teorema (Rosen, p.358)

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

- Será mostrado que um elemento da união é contado apenas uma vez pelo lado direito da equação.
- Suponha que  $a$  é membro de exatamente  $r$  dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , onde  $1 \leq r \leq n$ .
- Esse elemento é contado  $C(r, 1)$  vezes pelo primeiro somatório,  $C(r, 2)$  vezes pelo segundo somatório, etc. Assim, esse elemento é contado exatamente:

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

- Nosso objetivo é provar que essa quantidade é igual a 1.

- Vimos que

$$C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - \dots + (-1)^r C(r, r) = 0.$$

- Consequentemente:

$$1 = C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + \dots + (-1)^{r+1} C(r, r).$$

Logo, cada elemento é contado apenas uma vez.

- 1) Quantos elementos estão em  $A \cup B$  se existem 12 elementos em  $A$ , 18 elementos em  $B$ , e
  - 1)  $A \cap B = \emptyset$
  - 2)  $|A \cap B| = 1$
  - 3)  $|A \cap B| = 6$
  - 4)  $A \subseteq B$
- 2) Encontre a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 100 que são ímpares ou o quadrado de um inteiro.
- 3) Encontre a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 100 que não são divisíveis por 5 ou por 7.
- 4) Quantas cadeias de bits de tamanho 8 não contém 6 zeros consecutivos?

- 5) Quantas permutações de 10 dígitos começam com 987, ou possuem 45 a partir da quinta posição, ou terminam com 123?
- 6) Quantos elementos estão na união de quatro conjuntos se cada um dos conjuntos possui 100 elementos, cada par compartilha 50 elementos, cada três compartilha 25 elementos e os quatro compartilham 5 elementos?