# Notas sobre Funções(1)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

2007.1 / CIn-UFPE

# Noções Básicas

**Definição (Função)**

*Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função de $A$ em $B$ é um mapeamento de exatamente um elemento de $B$ para cada elemento de $A$. Podemos dá uma definição alternativa: uma função de $A$ em $B$ é um subconjunto de $A \times B$, onde cada elemento de $A$ aparece exatamente uma única vez como primeiro componente do par ordenado. Escrevemos $f(a) = b$ se $b$ é o único elemento de $B$ associado pela função $f$ ao elemento $a$ de $A$. Se $f$ é uma função de $A$ em $B$, escrevemos $f : A \rightarrow B$.*

# Noções Básicas

## Definição (domínio, imagem)

*Se $f$ é uma função de $A$ em $B$ dizemos que $A$ é o* **domínio** *de $f$ e $B$ é o* **contradomínio** *de $f$. Se $f(a) = b$, dizemos que $b$ é a* **imagem** *de $a$ e $a$ é a* **pré-imagem** *de $b$. O* **conjunto imagem**, *denotado por $I$, de $f$ é o conjunto de todas as imagens dos elementos de $A$.*

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \rightarrow B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
    - uma descrição verbal;
    - um gráfico;
    - uma equação;
    - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \rightarrow B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de $S$ é o subconjunto de $B$ que contem as imagens dos elementos de $S$. Denotamos a imagem de $S$ por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

# Noções Básicas

**Definição (função sobrejetora)**

*Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) se o conjunto imagem de $f$ é igual ao seu contradomínio.*

**Definição (função injetora)**

*Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora (ou injetiva, ou um-para-um) se nenhum elemento de $B$ for imagem por $f$ de dois elementos distintos de $A$.*

**Definição (função bijetora)**

*Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora (ou bijetiva) se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

# Funções inversas

## Definição (Função inversa)

*Seja $f$ uma função bijetora de um conjunto $S$ para um conjunto $B$. A função inversa de $f$, denotada por $f^{-1}$, é a função que associa a um elemento $b \in B$, um único elemnto $a \in A$, de forma que se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$.*

## Exemplo

*Seja $f$ a função de $\{a, b, c\}$ em $\{1, 2, 3\}$ de forma que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, e $f(c) = 1$. A função $f$ é* **inversível***? Em caso afirmativo, qual é a sua inversa?*

## Exemplo

*Seja $f : Z \rightarrow Z$ de forma que $f(x) = x + 1$ Essa função possui inversa? Em caso afirmativo, qual a sua inversa?*

# Função composta

## Definição (composição de funções)

*Seja $g$ uma função de $A$ em $B$ e seja $f$ uma função de $B$ em $C$. A composição das funções $f$ e $g$, também chamada da função composta de $f$ com $g$. denotada por $f \circ g$ é definida como a seguir:*

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

# Algumas funções importantes

## Definição (função chão e teto)

*A função* **chão** *associa ao número real $x$ o maior inteiro que é menor ou igual a $x$. O valor da função chão em $x$ é denotado por $\lfloor x \rfloor$. A função* **teto** *associa ao número real $x$ o menor inteiro que é maior ou igual a $x$. O valor da função teto em $x$ é denotado por $\lceil x \rceil$.*

## Exemplo

$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lceil 0.5 \rceil = 1$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, $\lceil -0.5 \rceil = 0$, $\lfloor 8 \rfloor = 8$, $\lceil 8 \rceil = 8$, $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$

# Exercícios

1. Determine quais das seguintes funções de $Z \rightarrow Z$ são injetoras:
    1. $f(x) = x - 1$
    2. $f(x) = x^2 + 1$
    3. $f(x) = \lceil x/2 \rceil$
2. Quais das funções anteriores são sobrejetoras?
3. Se $f$ e $f \circ g$ são injetoras, então $g$ é injetora também? Apresente uma prova para justificar a sua resposta.