Notas sobre Conjuntos

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

2007.1 / CIn-UFPE

Definições Básicas

Definição (Conjunto/elemento)

Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto. Dizemos que um conjunto A contem seus elementos.

- Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento de A; e $a \notin A$ para denotar que a não é um elemento de A;

Definições Básicas

Definição (Conjunto/elemento)

Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto. Dizemos que um conjunto A contem seus elementos.

- Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento de A; e $a \notin A$ para denotar que a não é um elemento de A;

Definições Básicas

Definição (Conjunto/elemento)

Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto. Dizemos que um conjunto A contem seus elementos.

- Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento de A; e $a \notin A$ para denotar que a não é um elemento de A;

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
    1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
    2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
    3. Definição recursiva:

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     - $2 \in A$
     - Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:
  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     1. $2 \in A$
     2. Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto *U*, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto *U*, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
    - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
    - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
    - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Descrevendo conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

Definições Básicas

- Alguns conjuntos conhecidos: N (naturais) = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, Z (inteiros) = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, etc;
- O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Definição (Conjuntos iguais)

Dizemos que dois conjuntos são iguais se e somente se eles contém os mesmos elementos.

Exemplo

Os seguintes conjuntos são iguais:
$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\}$

Definições Básicas

Definição (Subconjunto)

Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.

- $A \subseteq B : \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;

Definições Básicas

Definição (Subconjunto)

Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.

- $A \subseteq B : \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;

Definições Básicas

Definição (Subconjunto)

Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.

- $A \subseteq B : \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;

Definições Básicas

Definição (Subconjunto)

Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.

- $A \subseteq B : \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;

Definições Básicas

Definição (Subconjunto)

Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.

- $A \subseteq B : \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Definições Básicas

- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x$ é um subconjunto de $\{a, b\}\}$

Cardinalidade

Definição (Cardinalidade)

Seja S um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em S, onde n é um inteiro não negativo, dizemos que S é um conjunto **finito** *e n é a* **cardinalidade** *de S. A cardinalidade de S é denotada por $|S|$.*

Definição (Conjunto infinito)

Um conjunto é dito infinito se ele não é finito.

Conjunto das Partes

Definição (Conjunto das partes)

Dado um conjunto S, o conjunto das partes de S é o conjunto de todos os subconjuntos de S. O conjunto das partes de S é denotado por $P(S)$.

- Se um conjunto S possui n elementos então o seu conjunto das partes possui 2^n elementos.

Produto cartesiano

- Conjuntos não são ordenados;
- Precisamos de uma estrutura diferente para representar estruturas ordenada s: $n - tuplas$ ordenadas.

Produto cartesiano

- Conjuntos não são ordenados;
- Precisamos de uma estrutura diferente para representar estruturas ordenada s: $n - tuplas$ ordenadas.

Produto cartesiano

- Conjuntos não são ordenados;
- Precisamos de uma estrutura diferente para representar estruturas ordenada s: $n - tuplas$ ordenadas.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2 -$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n -$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2 -$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n -$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

- $2-$ *tuplas* são chamadas de pares ordenados;
- $n-$ *tuplas* ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Produto cartesiano

Definição (Produto cartesiano)

Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \, . \, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Produto cartesiano

Definição (Produto cartesiano)

Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Produto cartesiano

Definição (Produto cartesiano)

Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Produto cartesiano

Definição (Produto cartesiano)

Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \, . \, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Produto cartesiano

Definição (Produto cartesiano)

Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \, . \, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Exercícios

- Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjuntos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar contra-contra-exemplo quando for conveniente).
  1. $\{\emptyset\} = \{0\}$
  2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  3. $\{b, c\} \in \{b, c\}$
  4. $AXB = BXA$
  5. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

Exercícios

- Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjuntos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar contra-contra-exemplo quando for conveniente).
  1. $\{\emptyset\} = \{0\}$
  2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  3. $\{b, c\} \in \{b, c\}$
  4. $AXB = BXA$
  5. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

Exercícios

- Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjuntos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar contra-contra-exemplo quando for conveniente).
  1. $\{\emptyset\} = \{0\}$
  2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  3. $\{b, c\} \in \{b, c\}$
  4. $AXB = BXA$
  5. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

Exercícios

- Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjuntos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar contra-contra-exemplo quando for conveniente).
  1. $\{\emptyset\} = \{0\}$
  2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  3. $\{b, c\} \in \{b, c\}$
  4. $AXB = BXA$
  5. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

Exercícios

- Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjuntos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar contra-contra-exemplo quando for conveniente).
  1. $\{\emptyset\} = \{0\}$
  2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  3. $\{b, c\} \in \{b, c\}$
  4. $AXB = BXA$
  5. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

Exercícios

- O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?
- Nesse exercício o **paradoxo de Russel** é apresentado. Seja S um conjuntoque contem um conjunto x se o conjunto x não pertence a ele próprio, ou seja $S = \{x \mid x \notin x\}$.
  1. Mostre que a suposição de que S é membro de S leva a uma contradição;
  2. mostre que a suposição de que S não é membro de S leva a uma contradição.

Exercícios

- O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?
- Nesse exercício o **paradoxo de Russel** é apresentado. Seja S um conjuntoque contem um conjunto x se o conjunto x não pertence a ele próprio, ou seja $S = \{x \mid x \notin x\}$.
  1. Mostre que a suposição de que S é membro de S leva a uma contradição;
  2. mostre que a suposição de que S não é membro de S leva a uma contradição.

Exercícios

- O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?
- Nesse exercício o **paradoxo de Russel** é apresentado. Seja S um conjuntoque contem um conjunto x se o conjunto x não pertence a ele próprio, ou seja $S = \{x \mid x \notin x\}$.
  1. Mostre que a suposição de que S é membro de S leva a uma contradição;
  2. mostre que a suposição de que S não é membro de S leva a uma contradição.

Exercícios

- O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?
- Nesse exercício o **paradoxo de Russel** é apresentado. Seja S um conjuntoque contem um conjunto x se o conjunto x não pertence a ele próprio, ou seja $S = \{x \mid x \notin x\}$.
  1. Mostre que a suposição de que S é membro de S leva a uma contradição;
  2. mostre que a suposição de que S não é membro de S leva a uma contradição.