Matemática Discreta

Lista de Exercícios - Relações (1)

1. Classifique as seguintes relações sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quanto às propriedades reflexiva, transitiva, simétrica e anti-simétrica.

   (a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

   (b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

   (c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

   (d) $R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

   (e) $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

   (f) $R_6 = \{(3, 4)\}$

2. Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo da relação $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$ no conjunto $\{a, b, c, d\}$.

3. Classifique cada relação em SXT, onde $S = T = \mathbf{N}$, como um-para-um, um-para-vários, vários-para-um ou vários-para-vários.

   (a) $\rho = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (4, 3)\}$

   (b) $\rho = \{(9, 7), (6, 5), (3, 6), (8, 5)\}$

   (c) $\rho = \{(12, 5), (8, 4), (6, 3), (7, 12)\}$

   (d) $\rho = \{(2, 7), (8, 4), (2, 5), (7, 6), (10, 1)\}$

4. Sejam ρ e σ relações binárias em $\mathbf{N}$ definidas por $x\rho y \leftrightarrow$ "x divide y" e $x\sigma y \leftrightarrow 5x \leq y$. Determine quais dos pares ordenados satisfazem às relações dadas:

   (a) $\rho \cup \sigma$; $(2, 6), (3, 17), (2, 1), (0, 0)$

   (b) $\rho \cap \sigma$; $(3, 6), (1, 2), (2, 12)$

   (c) ρ'; $(1, 5), (2, 8), (3, 15)$

   (d) σ'; $(1, 1), (2, 10), (4, 8)$

5. Seja $S = \{0, 2, 4, 6\}$ e $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é ou não uma função com domínio S e contradomínio T. Em cada caso afirmativo, indique se a função é injetiva e/ou sobrejetiva.

(a) $\{(0,2),(2,4),(4,6),(6,0)\}$

(b) $\{(6,3),(2,1),(0,3),(4,5)\}$

(c) $\{(2,3),(4,7),(0,1),(6,5)\}$

(d) $\{(2,1),(4,5),(6,3)\}$

(e) $\{(6,1),(0,3),(4,1),(0,7),(2,5)\}$

6. Faz sentido pensarmos no fecho anti-simétrico de uma relação em um conjunto? Justifique.

7. Para cada caso abaixo, apresente um conjunto S e uma relação binária ρ em S (diferente das apresentadas nos exemplos e problemas) que satisfaça às condições pedidas.

   (a) ρ é reflexiva e anti-simétrica, mas não é transitiva.

   (b) ρ não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva.

8. Descreva em palavras o que o fecho transitivo de cada relação abaixo representa.

   (a) $S =$ conjunto de todos os edifícios da cidade.
   $x\rho y \leftrightarrow x$ é um ano mais velho que y.

   (b) $S =$ conjunto de todos os homens de Caruaru.
   $x\rho y \leftrightarrow x$ é pai de y.

9. Uma relação ρ em um conjunto S é **irreflexiva** se para todo $s \in S$, o par $(s,s) \notin \rho$. Ou seja, ρ é irreflexiva se nenhum elemento de S está relacionado consigo mesmo. Pergunta-se:

   (a) Quais das relações apresentadas na primeira questão da lista são irreflexivas?

   (b) Apresente um exemplo de relação binária ρ no conjunto $S = \{1,2,3\}$ que não seja nem reflexiva e nem irreflexiva.

10. Uma relação ρ em um conjunto S é **assimétrica** se $(a,b) \in \rho$ implica que $(b,a) \notin \rho$, para $a,b \in S$. Pergunta-se:

11. Quais das relações apresentadas na primeira questão da lista são assimétricas?

12. Apresente um exemplo de relação binária ρ no conjunto $S = \{1,2,3\}$ que não seja nem simétrica e nem assimétrica.

13. Prove que, se uma relação binária R em um conjunto S é reflexiva e transitiva, então a relação $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência.

14. Seja $S = N \times N$ e seja R uma relação binária em S definida por $(x, y)R(z, w) \leftrightarrow y = w$. Mostre que R é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

15. Seja $S = N \times N$ e seja R uma relação binária em S definida por $(x, y)R(z, w) \leftrightarrow x + y = z + w$. Mostre que R é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

16. Prove que se R é uma relação reflexiva em um conjunto S, então R^{-1} é reflexiva.

17. Prove que se R é uma relação simétrica em um conjunto S, então R^{-1} é simétrica.

18. Prove que se R é uma relação transitiva em um conjunto S, então R^{-1} é transitiva.

19. Uma relação R sobre um conjunto A é **circular** se para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(z, x) \in R$. Mostre que R é reflexiva e circular se e somente se R é uma relação de equivalência.