Notas sobre Funções (1)
Anjolina Grisi de Oliveira

1 Noções Básicas sobre Funções

Definição 1 (Função) *Sejam A e B conjuntos. Uma função de A em B é um mapeamento de exatamente um elemento de B para cada elemento de A. Podemos dá uma definição alternativa: uma função de A em B é um subconjunto de $A \times B$, onde cada elemento de A aparece exatamente uma única vez como primeiro componente do par ordenado. Escrevemos $f(a) = b$ se b é o único elemento de B associado pela função f ao elemento a de A. Se f é uma função de A em B, escrevemos $f : A \to B$.*

Definição 2 (domínio, imagem) *Se f é uma função de A em B dizemos que A é o* **domínio** *de f e B é o* **contradomínio** *de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a* **imagem** *de a e a é a* **pré-imagem** *de b. O* **conjunto imagem**, *denotado por I, de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A.*

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento). Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \subseteq A$ e seja $f : A \to B$. A imagem de S é o subconjunto de B que contem as imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

Definição 3 (função sobrejetora) *Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) se o conjunto imagem de f é igual ao seu contradomínio.*

Definição 4 (função injetora) *Uma função $f : A \to B$ é injetora (ou injetiva, ou um-para-um) se nenhum elemento de B for imagem por f de dois elementos distintos de A.*

Definição 5 (função bijetora) *Uma função $f : A \to B$ é bijetora (ou bijetiva) se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Funções inversas

Definição 6 (Função inversa) *Seja f uma função bijetora de um conjunto S para um conjunto B. A função inversa de f, denotada por f^{-1}, é a função que associa a um elemento $b \in B$, um único elemnto $a \in A$, de forma que se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$.*

Exemplo 1 *Seja f a função de $\{a, b, c\}$ em $\{1, 2, 3\}$ de forma que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, e $f(c) = 1$. A função f é* **inversível***? Em caso afirmativo, qual é a sua inversa?*

Exemplo 2 *Seja $f : Z \to Z$ de forma que $f(x) = x + 1$ Essa função possui inversa? Em caso afirmativo, qual a sua inversa?*

Função composta

Definição 7 (composição de funções) *Seja g uma função de A em B e seja f uma função de B em C. A composição das funções f e g, também chamada da função composta de f com g. denotada por $f \circ g$ é definida como a seguir:*

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Algumas funções importantes

Definição 8 (função chão e teto) *A função* **chão** *associa ao número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x. O valor da função chão em x é denotado por $\lfloor x \rfloor$. A função* **teto** *associa ao número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. O valor da função teto em x é denotado por $\lceil x \rceil$.*

Exemplo 3 $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lceil 0.5 \rceil = 1$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, $\lceil -0.5 \rceil = 0$, $\lfloor 8 \rfloor = 8$, $\lceil 8 \rceil = 8$, $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$

Exercícios

1. Determine quais das seguintes funções de $Z \to Z$ são injetoras:
   (a) $f(x) = x - 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 1$
   (c) $f(x) = \lceil x/2 \rceil$
2. Quais das funções anteriores são sobrejetoras?
3. Se f e $f \circ g$ são injetoras, então g é injetora também? Apresente uma prova para justificar a sua resposta.