Notas sobre Conjuntos (2)
Anjolina Grisi de Oliveira

1 Operações com conjuntos

Definição 1 (União) *Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão ou em A ou em B, ou em ambos.*

- $A \cup B : \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Definição 2 (Interseção) *Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A interseção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo.*

- $A \cap B : \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Definição 3 (Conjuntos disjuntos) *Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.*

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Definição 4 (Diferença) *Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A diferença entre A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto que contem aqueles elementos que estão em A mas não estão em B. A diferença de A e B também é chamada de* **complemento de B em relação a** *A.*

- $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$;

Definição 5 (Complemento) *Seja U o conjunto universo. O complemento do conjunto A, denotado por $\bar{A}$ ou por A', é o complemento de A em relação a U. Em outras palavras, o complemento do conjunto A é $U - A$.*

- $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Identidades entre conjuntos

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(comutatividade)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(associatividade)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributividade)
4a. $A \cup \emptyset = A$	4b. $A \cap U = A$	(identidade)
5a. $A \cup U = U$	5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$	(dominação)
6a. $A \cup A' = U$	6b. $A \cap A' = \emptyset$	(complemento)
6c. $(A')' = A$		(complemento)
7a. $A \cup A = A$	7b. $A \cap A = A$	(idempotência)
8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$	(De Morgan)

Tabela 1: Identidades Básicas envolvendo conjuntos

Exemplo 1 *Prove que* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1. *Suponha que* $x \in \overline{A \cap B}$.
2. *De* 1 *temos que* $x \notin A \cap B$.
3. *De* 2 *temos que* $x \notin A$ *ou* $x \notin B$.
4. *De* 3 *temos que* $x \in \bar{A}$ *ou* $x \in \bar{B}$. *Consequentemente,* $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. *Provamos então que* $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.
6. *Suponha que* $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
7. *De* 6 *temos que* $x \in \bar{A}$ *ou* $x \in \bar{B}$.
8. *De* 7 *temos que* $x \notin A$ *ou* $x \notin B$.
9. *De* 8 *temos que* $x \notin A \cap B$. *Consequentemente,* $x \in \overline{A \cap B}$.
10. *Provamos então que* $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
11. *A partir de* 5 *e* 10 *provamos que* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 2 *Use as identidades entre conjuntos para provar que* $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

1. *pela primeira lei de De Morgan inferimos* $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$.
2. $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ *(pela segunda lei de De Morgan).*
3. $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ *(pela comutatividade da interseção).*
4. $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ *(pela comutatividade da união)*

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

  1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
  2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

- Dessa forma, responda as seguintes questões:

  1. Seja $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?
  2. Seja $A_i = \{i,\ i+1,\ i+2, \ldots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
  3. Seja $A_i = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Exercícios

1. Determine se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) $x \in \{x\}$
   (b) $\{x\} \subseteq \{x\}$
   (c) $\{x\} \in \{x\}$
   (d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
   (e) $\emptyset \subseteq \{x\}$
   (f) $\emptyset \in \{\{x\}\}$

2. Suponha que A, B e C são conjuntos tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.

3. Encontre um exemplo de dois conjuntos A e B de forma que $A \in B$ e $A \subseteq B$.

4. Determine se cada um dos seguintes conjuntos é o conjunto das partes de algum conjunto.
   (a) $\emptyset$
   (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$
   (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
   (d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

5. Encontre os conjuntos A e B se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

6. Prove que se A e B são conjuntos então $A - B = A \cap \bar{B}$.

7. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:
   (a) $(A \cap B) \subseteq A$
   (b) $A - B \subseteq A$
   (c) $A \cap (B - A) = \emptyset$
   (d) $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
   (e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
   (f) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
   (g) $A \cup (B - A) = A \cup B$
   (h) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$

8. O que é possível afirmar sobre A e B em cada uma das sentenças abaixo, supondo que cada sentença é verdadeira:
   (a) $A \cup B = A$
   (b) $A - B = A$
9. Você pode concluir que $A = B$ se A, B e C são conjuntos e $A \cup C = B \cup C$?
10. A **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B, denotada por $A \otimes B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B, mas não em ambos. Com base nessa definição, responda:
    (a) Encontre a diferença simétrica entre $\{1, 3, 5\} e \{1, 2, 3\}$.
    (b) Desenhe o diagrama de Venn para $A \otimes B$.
    (c) Mostre que $A \otimes B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
    (d) Mostre que se A é um subconjunto de um conjunto universal U, então:
        i. $A \otimes A = \emptyset$
        ii. $A \otimes U = \bar{A}$
11. O *sucessor* de um conjunto A é o conjunto $A \cup \{A\}$. Encontre o sucessor dos seguintes conjuntos:
    (a) $\{1, 2, 3\}$
    (b) $\{\emptyset\}$
12. Em certas situações, o número de vezes que um determinado elemento ocorre em uma coleção não ordenada é relevante para o problema estudado. **Multiconjuntos** são coleções não ordenadas de elementos, onde cada elemento pode ocorrer como membro mais de uma vez. A notação $\{m_1.a_1, m_2.a_2, \ldots, m_r.a_r\}$ denota que no multiconjunto o elemento a_1 ocorre m_1 vezes, o elemento a_2 ocorre m_2 vezes, e assim sucessivamente. Os números m_i são chamados de **multiplicidades** dos elementos a_i, onde $i = 1, 2, \ldots, r$.

    Sejam P e Q multiconjuntos. A *união* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é o máximo de suas multiplicidades em P e em Q. A *interseção* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de cada elemento é o mínimo das multiplicidades em P e Q. A *diferença* entre P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a multiplicidade do elemento em P menos sua multiplicidade em Q, a não ser que a diferença seja negativa, nesse caso a multiplicidade é zero. A *soma* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a soma de suas multiplicidades em P e em Q. A *soma* é denotada por $+$.

    Com base nessas definições, pergunta-se:

(a) Sejam A e B os multiconjuntos $\{3.a, 2.b, 1.c\}$ e $\{2.a, 3.b, 4.d\}$, respectivamente. Encontre os multiconjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ e $A + B$.