Notas sobre Conjuntos (1)
Anjolina Grisi de Oliveira

1 Introdução

- CONJUNTOS SÃO USADOS PARA AGRUPAR OBJETOS

Definição 1 (Conjunto/elemento) *Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto. Dizemos que um conjunto A contem seus elementos.*

- Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento de A; e $a \notin A$ para denotar que a não é um elemento de A;

- Existem várias maneiras de descrevermos um conjunto:

  1. Listando seus elementos: $V = \{a, e, i, o, u\}$
  2. Definindo uma propriedade: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$
  3. Definição recursiva:
     (a) $2 \in A$
     (b) Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$
  4. Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
     - Um conjunto U, universo, que contem todos os objetos sob consideração: **retângulo**;
     - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
     - Pontos são usados para representar elementos particulares do conjuntos.

- Alguns conjuntos conhecidos: N (naturais) $= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, Z (inteiros) $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, etc;

- O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Definição 2 (Conjuntos iguais) *Dizemos que dois conjuntos são iguais se e somente se eles contém os mesmos elementos.*

Exemplo 1 *Os seguintes conjuntos são iguais:*
$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\}$

Definição 3 (Subconjunto) *Um conjunto A é subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. A notação $A \subseteq B$ é usada para denotar que A é subconjunto de B.*

- $A \subseteq B : \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;
- $\emptyset \subseteq P$, qualquer que seja P;
- $P \subseteq P$, qualquer que seja P;
- SUBCONJUNTO PRÓPRIO: Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B: $A \subset B$;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$;
- Conjuntos podem ser membros de conjuntos: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ou seja $\{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$

Definição 4 (Cardinalidade) *Seja S um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em S, onde n é um inteiro não negativo, dizemos que S é um conjunto* **finito** *e n é a* **cardinalidade** *de S. A cardinalidade de S é denotada por $|S|$.*

Definição 5 (Conjunto infinito) *Um conjunto é dito infinito se ele não é finito.*

Definição 6 (Conjunto das partes) *Dado um conjunto S, o conjunto das partes de S é o conjunto de todos os subconjuntos de S. O conjunto das partes de S é denotado por $P(S)$.*

- Se um conjunto S possui n elementos então o seu conjunto das partes possui 2^n elementos.

Produto cartesiano

- Conjuntos não são ordenados;
- Precisamos de uma estrutura diferente para representar estruturas ordenadas: $n - tuplas$ ordenadas.

Definição 7 (n-tupla ordenada) *A n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é a coleção ordenada que possui a_1 como primeiro elemento, a_2 como segundo elemento, ..., e a_n como e-nésimo elemento.*

- $2 - tuplas$ são chamadas de pares ordenados;
- $n - tuplas$ ordenadas iguais:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a seja igual a b.

Definição 8 (Produto cartesiano) *Sejam A e B conjuntos árbitrários. o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenado a, b, onde $a \in A$ e $b \in B$.*

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- $|A \times B| = |A| \, . \, |B|$
- $A \times B = B \times A$?

Definição 9 (Produto cartesiano de mais de 2 conjuntos) *O Produto cartesiano dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é o conjunto das $n -$ tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ onde $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Exercícios

1. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para conjun tos arbitrários A, B e C ? Justifique as respostas falsas (pode usar con tra-contra-exemplo quando for conveniente).

   (a) $\{\emptyset\} = \{0\}$
   (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (c) $\{b, c\} \in \{b, c\}$
   (d) $AXB = BXA$
   (e) Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$

2. O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

3. Nesse exercício o **paradoxo de Russel** é apresentado. Seja S um conjuntoque contem um conjunto x se o conjunto x não pertence a ele próprio, ou seja $S = \{x \mid x \notin x\}$.

   (a) Mostre que a suposição de que S é membro de S leva a uma contradição;
   (b) mostre que a suposição de que S não é membro de S leva a uma contradição.