Capítulo 6

Normalização

6.1 Cortes

Qualquer pessoa com uma experiência razoável na construção de derivações em dedução natural terá observado que até certo ponto se consegue derivações um tanto eficientes. O pior que pode acontecer é um número de passos que terminam com o que já foi derivado ou dado, mas então pode-se obviamente encurtar a derivação.

Aqui está um exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\sigma \wedge \varphi]^2}{\varphi}\wedge E \quad [\varphi \to \psi]^1}{\psi}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{[\sigma \wedge \varphi]^2}{\sigma}\wedge E}{\psi \to \sigma}\to I}{\sigma}\to E}{\dfrac{(\varphi \to \psi) \to \sigma}{(\sigma \wedge \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to \sigma)}\to I_2}\to I_1$$

σ ocorre duas vezes, a primeira vez é uma premissa para uma regra de $\to I$, e a segunda vez o resultado de uma regra de $\to E$. Podemos encurtar a derivação da seguinte maneira:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\sigma \wedge \varphi]^1}{\sigma}\wedge E}{(\varphi \to \psi) \to \sigma}\to I}{(\sigma \wedge \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to \sigma)}\to I_1$$

Aparentemente não é uma boa idéia introduzir algo e eliminar imediatamente. Isso é de fato a idéia-chave para simplificar derivações: evitar eliminações após introduções. Se uma derivação contém uma introdução seguida de uma eliminação, então pode-se, via de regra, facilmente encurtar a derivação; a questão é, pode-se livrar de *todos* esses passos indesejados? A resposta é 'sim', mas a demonstração não é trivial.

O tópico deste capítulo pertence à teoria da prova; o sistema de dedução natural foi introduzido por Gentzen, que também mostrou que "desvios" nas derivações podem ser eliminados. O assunto foi revitalizado novamente por Prawitz, que estendeu consideravelmente as técnicas e os resultados de Gentzen.

Introduziremos um número de noções de modo a facilitar o tratamento.

Definição 6.1.1 As fórmulas diretamente acima da linha em uma regra de derivação são chamadas de *premissas*, a fórmula diretamente abaixo da linha, a *conclusão*. Em regras de eliminação uma premissa não contendo o conectivo é chamada de *premissa menor*. Todas as outras premissas são chamadas de *premissas maiores*.

Convenção. As premissas maiores, a partir de agora, aparecerão do lado esquerdo.

Definição 6.1.2 Uma ocorrência de fórmula γ é um *corte* em uma derivação quando é a conclusão de uma regra de introdução e a premissa maior de uma regra de eliminação. γ é chamada de *fórmula de corte* do corte.

No exemplo acima $\psi \to \sigma$ é uma fórmula de corte.

Adotaremos uma regra $\forall I$ levemente modificada, pois isso nos ajudará a uniformizar o sistema.

$$\forall I \qquad\qquad \frac{\varphi}{\forall x\, \varphi[x/y]}\,\forall I$$

onde y não ocorre livre em φ ou em uma hipótese da derivação de φ, e x é livre para y em φ.

A versão antiga de $\forall I$ é claramente um caso especial da nova regra. Usaremos as notações familiares, e.g.

$$\forall I \qquad\qquad \frac{\varphi(y)}{\forall x\, \varphi(x)}\,\forall I$$

Note que com a nova regra obtemos uma derivação mais curta para

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(x)\end{array}}{\forall x\varphi(x)}\,\forall I}{\varphi(y)}\,\forall E}{\forall y\varphi(y)}\,\forall I \qquad \text{a saber} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(x)\end{array}}{\forall y\varphi(y)}\,\forall I$$

A adoção da nova regra não é necessária, mas um tanto conveniente.

Olharemos primeiro para o cálculo de predicados com $\wedge, \to, \perp, \forall$.

Derivações serão sistematicamente convertidas em derivações mais simples por "eliminação de cortes"; aqui está um exemplo:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\to I \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \psi\end{array}}{\sigma}\to E \qquad \text{converte para} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \sigma\end{array}$$

Em geral, quando a árvore em consideração é uma subárvore de uma derivação maior, a subárvore inteira que termina com σ é substituída pela segunda. O resto da derivação permanece inalterado. Essa é uma das características de derivações em dedução natural: para uma fórmula σ na derivação apenas a parte acima de σ é relevante para σ. Por conseguinte apenas indicaremos conversões até quando necessário, mas o leitor faria bem em ter em mente que fazemos a substituição dentro de uma dada derivação maior.

Listamos as conversões possíveis:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \varphi_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I}{\varphi_i}\wedge E \qquad \text{é convertida para} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_i \\ \varphi_i\end{matrix}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \psi\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\psi] \\ \mathcal{D}_2 \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \to \varphi}\to I}{\varphi}\to E \qquad \text{é convertida para} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \psi \\ \mathcal{D}_2 \\ \varphi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi\end{matrix}}{\forall x \varphi[x/y]}\forall I}{\varphi[t/y]}\forall E \qquad \text{é convertida para} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}[t/y] \\ \varphi[t/y]\end{matrix}$$

Não está imediatamente claro que essa conversão é uma operação legítima sobre derivações, e.g. considere a eliminação do corte mais abaixo que converte

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi(z,z)\end{matrix}}{\forall x \varphi(x,x)}}{\varphi(v,v)} \quad = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u \varphi(u,z)}{\varphi(v,z)}}{\forall v \varphi(v,z)}}{\varphi(z,z)}}{\forall x \varphi(x,x)}\forall I}{\varphi(v,v)}\forall E \qquad \text{para} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u \varphi(u,v)}{\varphi(v,v)}}{\forall v \varphi(v,v)}\forall I}{\varphi(v,v)} \quad = \quad \mathcal{D}[v/z]$$

A substituição impensada de v por z em $\mathcal{D}$ é questionável porque v não é livre para z na terceira linha e vemos que na derivação resultante $\forall I$ viola a condição sobre a variável própria.

De modo a evitar confusão do tipo acima, temos que olhar com um pouco mais de cuidado para a maneira com que manuseamos nossas variáveis em derivações. Existe, é claro, a óbvia distinção entre variáveis livres e variáveis ligadas, mas mesmo as variáveis livres não têm todas o mesmo papel. Algumas delas são "as variáveis" envolvidas em uma $\forall I$. Chamamos essas ocorrências de *variáveis próprias* e estendemos o nome a todas as ocorrências que estão "relacionadas" a elas. A noção de "relacionada" é o fecho transitivo da relação que duas ocorrências da mesma variável têm se uma ocorre em uma conclusão e a outra em uma premissa de uma regra em ocorrências de fórmula "relacionadas". É mais simples definir "relacionada" como o fecho reflexivo, simétrico, transitivo da relação "parente direto" que é dada verificando-se todas as regras de derivação, e.g. em $\dfrac{\varphi(x) \wedge \psi(x,y)}{\psi(x,y)} \wedge E$ a ocorrência superior e a ocorrência inferior de $\psi(x,y)$ estão diretamente relacionadas, assim como as ocorrências correspondentes de x e y. Do mesmo modo a φ superior e a inferior em

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Os detalhes deixo ao leitor.

Conflitos perigosos de variáveis podem sempre ser evitados, e trata-se apenas de renomeação rotineira de variáveis. Como tais questões sintáticas apresentam notórios pontos fracos, exercitaremos algum cuidado. Lembre que mostramos anteriormente que variáveis ligadas podem ser renomeadas ao mesmo tempo que se retém equivalência lógica. Usaremos esse expediente também em derivações.

Lema 6.1.3 *Em uma derivação as variáveis ligadas podem ser renomeadas de modo que nenhuma variável ocorre livre e ligada ao mesmo tempo.*

Demonstração. Por indução sobre $\mathcal{D}$. Na verdade é melhor fazer um pouco de 'carga de indução', em particular provar que as variáveis ligadas podem ser escolhidas fora de um dado conjunto de variáveis (incluindo as variáveis livres sob consideração). A demonstração é simples, e portanto deixo-a ao leitor. $\square$

Note que a formulação do lema é um tanto enrolada, queremos dizer obviamente que a configuração resultante é novamente uma derivação. Trata-se também de um artifício renomear algumas das variáveis livres em uma derivação, em particular queremos manter separadas as variáveis livres próprias e as não-próprias.

Lema 6.1.4 *Em uma derivação as variáveis livres podem ser renomeadas, de modo que variáveis próprias não-relacionadas sejam distintas e cada uma é usada exatamente uma vez em sua regra de inferência. Além do mais, nenhuma variável ocorre como uma variável própria e não-própria.*

Demonstração. Indução sobre $\mathcal{D}$. Escolha sempre uma variável nova para uma variável própria. Note que a renomeação das variáveis próprias não influencia as hipóteses e a conclusão. $\square$

Na prática pode ser necessário continuar renomeando variáveis de modo a satisfazer os resultados dos lemas acima.

A partir de agora assumimos que nossas derivações satisfazem a condição acima, i.e.

(i) variáveis livres e variáveis ligadas são distintas,

(ii) variáveis próprias e variáveis não-próprias são distintas, e cada variável própria é usada em precisamente uma $\forall I$.

Lema 6.1.5 *As conversões para $\rightarrow$, $\wedge$, $\forall$ produzem derivações.*

Demonstração. O único caso difícil é a $\forall$-conversão. Mas de acordo com nossa condição sobre variáveis $\mathcal{D}[t/u]$ é uma derivação quando $\mathcal{D}$ é uma derivação, pois as variáveis em t não atuam como variáveis próprias em $\mathcal{D}$. □

Observação. Existe uma prática alternativa para formulação das regras de lógica, que é de fato útil para propósitos teóricos de prova: faça uma distinção tipográfica entre variáveis livres e ligadas (uma distinção no alfabeto). Variáveis livres são chamadas de *parâmetros* naquela notação. Vimos que o mesmo efeito pode ser obtido por transformações sintáticas descritas acima. É então necessário, obviamente, formular a $\forall$-introdução na forma liberal!

6.2 Normalização para a Lógica Clássica

Definição 6.2.1 *Uma cadeia de conversões é chamada de* seqüência de redução. *Uma derivação $\mathcal{D}$ é chamada de* derivação irredutível *se não existe $\mathcal{D}'$ tal que $\mathcal{D} >_1 \mathcal{D}'$.*

Notação. $\mathcal{D} >_1 \mathcal{D}'$ representa "$\mathcal{D}$ é convertida para $\mathcal{D}'$". $\mathcal{D} > \mathcal{D}'$ representa "existe uma seqüência finita de conversões $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 >_1 \mathcal{D}_1 >_1 \ldots >_1 \mathcal{D}_{n-1} = \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \geq \mathcal{D}'$ representa $\mathcal{D} > \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. ($\mathcal{D}$ *reduz para* $\mathcal{D}'$).

A questão básica é obviamente 'toda seqüência de conversões termina em um número finito de passos?', ou equivalentemente '$>$ é bem-fundada?' A resposta vem a ser 'sim', mas primeiro olharemos para uma questão mais simples: 'toda derivação reduz a uma derivação irredutível?'

Definição 6.2.2 Se não existe $\mathcal{D}_1'$ tal que $\mathcal{D}_1 >_1 \mathcal{D}_1'$ (i.e. se $\mathcal{D}_1$ não contém cortes), então chamamos $\mathcal{D}_1$ de uma *derivação normal*, ou dizemos que $\mathcal{D}_1$ está *na forma normal*, e se $\mathcal{D} \geq \mathcal{D}'$ onde $\mathcal{D}'$ é normal, então dizemos que $\mathcal{D}$ normaliza para $\mathcal{D}'$.

Dizemos que $>$ tem a *propriedade de normalização forte* se $>$ é bem-fundada, i.e. não existe qualquer seqüência de reduções infinita, e a *propriedade da normalização fraca* se toda derivação normaliza.

Falando popularmente normalização forte diz que não importa como você escolhe suas conversões, você em última análise encontrará uma forma normal; normalização fraca diz que se você escolher suas conversões de uma determinada maneira, você encontrará uma forma normal.

Antes de descer às provas de normalização, chamamos a atenção para o fato de que a regra do $\perp$ pode ser restrita a instâncias onde a conclusão é atômica. Isso é obtido baixando o posto da conclusão passo a passo.

Exemplo.

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi} \quad \text{é substituída por} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\qquad\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\psi}}{\varphi\wedge\psi}\wedge I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\to\psi} \quad \text{é substituída por} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\psi}}{\varphi\to\psi}\to I \qquad \text{etc.}$$

(Note que na derivação à direita alguma hipótese pode ser cancelada, embora isso não seja necessário; se queremos obter uma derivação a partir das mesmas hipóteses, então é mais prudente não cancelar a φ naquela $\forall I$ específica). Um fato semelhante se verifica para RAA: basta aplicar RAA a instâncias atômicas. A demonstração é novamente uma questão de se reduzir a complexidade da fórmula relevante.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\varphi\wedge\psi)]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi} \quad \text{é substituída por} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]\qquad\dfrac{[\varphi\wedge\psi]}{\varphi}}{\bot}}{\neg(\varphi\wedge\psi)}\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}RAA \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]\qquad\dfrac{[\varphi\wedge\psi]}{\psi}}{\bot}}{\neg(\varphi\wedge\psi)}\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\psi}RAA}{\varphi\wedge\psi}\wedge I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\varphi\to\psi)]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\to\psi} \quad \text{é substituída por} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]\quad[\varphi\to\psi]}{\psi}\qquad[\neg\psi]}{\bot}}{\neg(\varphi\to\psi)}\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\psi}RAA}{\varphi\to\psi}$$

$$\begin{array}{c}[\neg\forall x\,\varphi(x)]\\ \mathcal{D}\\ \dfrac{\bot}{\forall x\,\varphi(x)}\end{array} \qquad \text{é substituída por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi(x)] \qquad \dfrac{[\forall x\,\varphi(x)]}{\varphi(x)}}{\bot}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi(x)}\,RAA}{\forall x\,\varphi(x)}$$

Algumas definições estão na vez agora:

Definição 6.2.3 (i) uma *fórmula de corte maximal* é uma fórmula com posto maximal.
(ii) $d = \max\{p(\varphi) \mid \varphi$ fórmula de corte em $\mathcal{D}\}$ (observe que $\max\ \emptyset = 0$).
$n =$ número de fórmulas de corte maximais e $pc(\mathcal{D}) = (d, n)$, o *posto de corte* de $\mathcal{D}$.

Se $\mathcal{D}$ não tem cortes, faça $pc(\mathcal{D}) = (0, 0)$. Baixaremos sistematicamente o posto de corte de uma derivação até que todos os cortes tenham sido eliminados. A ordenação sobre postos de corte é lexicográfica:
$(d, n) < (d', n') := d < d' \vee (d = d' \wedge n < n')$.

Fato 6.2.4 *$<$ é uma boa-ordenação (na verdade $\omega \cdot \omega$) e portanto não tem seqüências descendentes infinitas.*

Lema 6.2.5 *Seja $\mathcal{D}$ uma derivação com um corte no final, suponha que tal corte tenha posto n enquanto que todos os outros cortes tenham posto $< n$, então a conversão de $\mathcal{D}$ nesse corte mais inferior produz uma derivação com apenas cortes de posto $< n$.*

Demonstração. Considere todos os possíveis cortes no final e verifique os postos dos cortes após a conversão.

(i) $\rightarrow$-corte

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}_1\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \varphi\end{array}}{\psi} = \mathcal{D}. \qquad \text{Então } \mathcal{D} >_1 \mathcal{D}' = \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \varphi\\ \mathcal{D}_1\\ \psi\end{array}$$

Observe que nada aconteceu em $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, logo todos os cortes em $\mathcal{D}'$ têm posto $< n$.

(ii) $\forall$-corte

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(x)\end{array}}{\forall y\,\varphi(y)}}{\varphi(t)} = \mathcal{D}. \qquad \text{Então } \mathcal{D} >_1 \mathcal{D}' = \begin{pmatrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{pmatrix}[t/x]$$

A substituição de um termo não afeta o posto de corte de uma derivação, logo em $\mathcal{D}'$ todos os cortes têm posto $< n$.

(iii) $\wedge$-corte. Semelhante.

□

Observe que na linguagem com $\{\wedge, \rightarrow, \perp, \forall\}$ as reduções são bem simples, i.e. partes de derivações são substituídas por partes próprias (esquecendo os termos por um momento) – as coisas diminuem!

Lema 6.2.6 *Se $pc(\mathcal{D}) > (0,0)$, então existe um $\mathcal{D}'$ com $\mathcal{D} >_1 \mathcal{D}'$ e $pc(\mathcal{D}') < pc(\mathcal{D})$.*

Demonstração. Selecione uma fórmula de corte maximal em $\mathcal{D}$ tal que todos os cortes acima dela têm posto mais baixo. Aplique a redução apropriada a esse corte maximal, então a parte da derivação $\mathcal{D}$ terminando na conclusão σ do corte é substituída, pelo Lema 6.2.5, por uma (sub)derivação na qual toda fórmula de corte tem posto mais baixo. Se a fórmula de corte maximal era a única, então d é decrementado de 1, caso contrário n é decrementado de 1 e d permanece inalterado. Em ambos os casos $pc(\mathcal{D})$ diminui. Note que no primeiro caso n pode ficar muito maior, mas isso não importa na ordem lexicográfica. □

Observe que a eliminação de um corte (aqui!) é uma coisa local, i.e. ela afeta apenas a parte da árvore de derivação acima da conclusão do corte.

Teorema 6.2.7 (Normalização fraca) *Todas as derivações normalizam.*

Demonstração. Pelo Lema 6.2.6 o posto de corte pode ser baixado para $(0,0)$ em um número finito de passos, portanto a última derivação na seqüência de redução não tem mais cortes. □

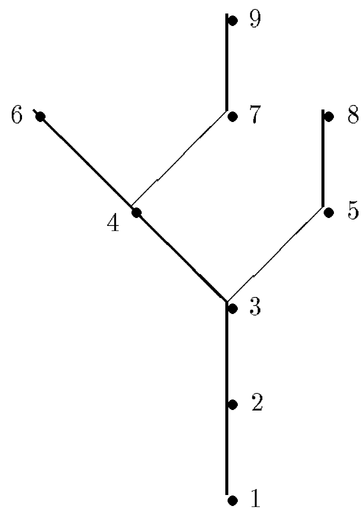
Derivações normais têm um número de propriedades convenientes, que podem ser percebidas de suas estruturas. De modo a formular essas propriedades e a estrutura, introduzimos algo mais de terminologia.

Definição 6.2.8 (i) Um *caminho* em uma derivação é uma seqüência de fórmulas $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_0 é uma hipótese, φ_n é a conclusão e φ_i é uma premissa imediatamente acima de φ_{i+1} $(0 \leq i \leq n-1)$. (ii) Uma *trilha* é uma parte inicial de um caminho que para na primeira premissa menor ou na conclusão. Em outras palavras, uma trilha pode apenas passar através das premissas maiores de regras de eliminação.

Exemplo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to (\psi \to \sigma)] \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]}{\varphi}}{\psi \to \sigma} \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]}{\psi}}{\sigma}}{\varphi \wedge \psi \to \sigma}}{(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \wedge \psi \to \sigma)}$$

A árvore subjacente é dada com rótulos numéricos:



e as trilhas são $(6, 4, 3, 2, 1)$, $(9, 7)$ e $(8, 5)$.

Fato 6.2.9 *Em uma derivação normal nenhuma regra de introdução (aplicação) pode preceder uma regra de eliminação (aplicação) em uma trilha.*

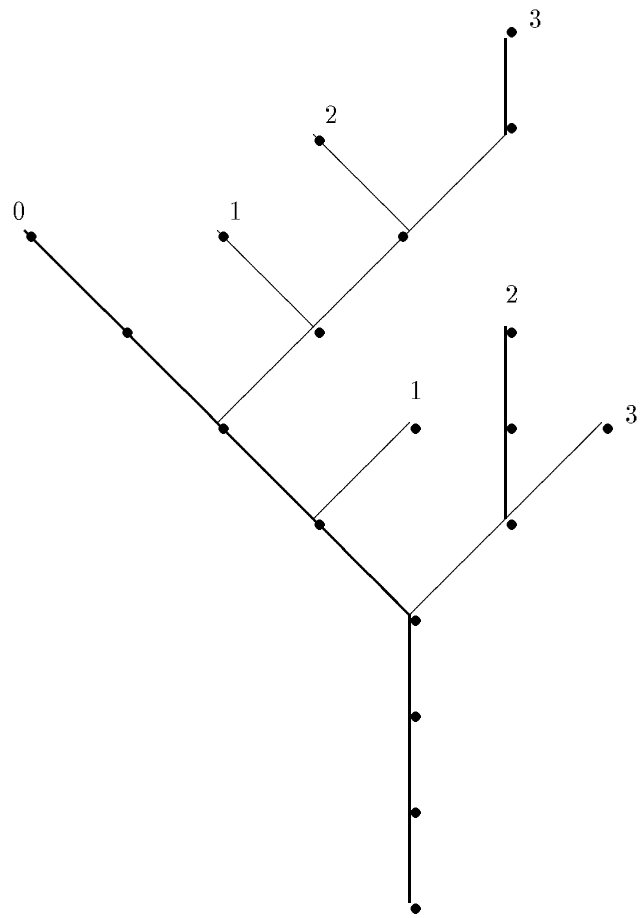
Demonstração. Suponha que uma regra de introdução precede uma regra de eliminação em uma trilha, então existe uma última regra de introdução que precede a primeira regra de eliminação. Devido ao fato de que a derivação é normal, uma não pode preceder imediatamente a outra. Logo tem que haver uma regra entre elas, que deve ser a regra $\perp$ ou a RAA, mas isso é claramente impossível, pois $\perp$ não pode ser a conclusão de uma regra de introdução. $\square$

Fato 6.2.10 *Uma trilha em uma derivação normal é dividida em (no máximo) três partes: uma parte de eliminação, seguida de uma parte $\perp$, seguida de uma parte de introdução. Cada uma das partes pode ser vazia.*

Demonstração. Pelo Fato 6.2.9 sabemos que se a primeira regra é uma eliminação, então todas as eliminações vêm primeiro. Olhe para a última eliminação, que resulta (1) na conclusão de $\mathcal{D}$, ou (2) em $\perp$, caso em que a regra $\perp$ ou RAA podem ser aplicadas, ou (3) é seguida por uma introdução. No último caso apenas introduções podem se seguir. Se aplicamos a regra $\perp$ ou RAA, então um átomo aparece, que pode apenas ser a premissa de uma regra de introdução (ou a conclusão de $\mathcal{D}$). $\square$

Fato 6.2.11 *Seja $\mathcal{D}$ uma derivação normal. Então $\mathcal{D}$ tem pelo menos uma trilha maximal, terminando na conclusão.*

A árvore subjacente de uma derivação normal tem o seguinte aspecto:



A figura sugere que as trilhas são classificadas de acordo com "quão distante" elas estão da trilha maximal. Formalizamos isso na noção de *ordem*.

Definição 6.2.12 Seja $\mathcal{D}$ uma derivação normal.

$$
\begin{array}{lcl}
o(t_m) & = & 0 \text{ para uma trilha maximal } t_m. \\
o(t) & = & o(t') + 1 \text{ se a fórmula final de uma trilha } t \text{ é uma premissa} \\
 & & \text{menor pertencente a uma premissa maior em } t'.
\end{array}
$$

As ordens das várias trilhas são indicadas na figura.

Teorema 6.2.13 (Propriedade da Subfórmula) *Seja $\mathcal{D}$ uma derivação normal de $\Gamma \vdash \varphi$, então cada (ocorrência de) fórmula ψ de $\mathcal{D}$ é uma subfórmula de φ ou de uma fórmula de Γ a menos que ψ seja cancelada por uma aplicação de* RAA *ou quando ela é o $\perp$ imediatamente após tal hipótese cancelada.*

Demonstração. Considere uma fórmula ψ em $\mathcal{D}$, se ela ocorre na parte de eliminação de sua trilha t, então ela é evidentemente uma subfórmula da hipótese no topo de t. Senão, então ela é uma subfórmula da fórmula final ψ_1 de t. Logo ψ_1 é uma subfórmula de uma fórmula ψ_2 de uma trilha t_1 com $o(t_1) < o(t)$. Repetindo o argumento encontramos que ψ é uma subfórmula de uma hipótese ou da conclusão.

Até agora consideramos todas as hipóteses, mas podemos fazer melhor. Se φ é uma subfórmula de uma hipótese cancelada, ela deve ser uma subfórmula da fórmula implicacional resultante no caso de uma aplicação de $\rightarrow I$, ou da fórmula resultante no caso de uma aplicação de RAA, ou (e essas são as únicas exceções) ela própria é cancelada por uma aplicação de RAA ou é uma $\perp$ imediatamente após tal hipótese. □

Pode-se inferir alguns corolários imediatos de nossos resultados até agora.

Corolário 6.2.14 *A lógica de predicados é consistente.*

Demonstração. Suponha que $\vdash \perp$, então existe uma derivação normal terminando em $\perp$ com todas as hipóteses canceladas. Existe uma trilha através da conclusão; nessa trilha não existem regras de introdução, logo a hipótese mais acima não é cancelada. Contradição. □

Note que 6.2.14 não vem como uma surpresa, já sabíamos que a lógica de predicados é consistente com base no Teorema da Corretude. O interessante da demonstração acima é que ela usa apenas argumentos sintáticos.

Corolário 6.2.15 *A lógica de predicados é conservativa sobre a lógica proposicional.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ uma derivação normal de $\Gamma \vdash \varphi$, onde Γ e φ não contêm quantificadores, então pela propriedade da subfórmula $\mathcal{D}$ contém apenas fórmulas livres de quantificadores, daí $\mathcal{D}$ é uma derivação na lógica proposicional. □

6.3 Normalização para a Lógica Intuicionística

Quando consideramos a linguagem inteira, incluindo $\vee$ e $\exists$, algumas das noções introduzidas acima têm que ser reconsideradas. Brevemente mencionamos tais noções:

– na regra $\exists E$ $\quad \dfrac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(u)]\\ \mathcal{D}\\ \sigma\end{array}}{\sigma}$ $\quad u$ é chamada de variável própria.

– os lemas sobre variáveis ligadas, variáveis próprias e variáveis livres permanecem corretos.

– cortes e fórmulas de corte são mais complicados, e serão trabalhados adiante.

Assim como anteriormente, assumimos que nossas derivações satisfazem as condições sobre variáveis livres e ligadas e sobre variáveis próprias.

A lógica intuicionística adiciona certas complicações à técnica desenvolvida acima. Podemos ainda definir todas as conversões:

$$\vee\text{-}\mathit{convers\tilde{a}o}\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\vee I \quad \begin{array}{c}[\varphi_1]\\ \mathcal{D}_1\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi_2]\\ \mathcal{D}_2\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\vee E \quad \text{converte para} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_i\\ \mathcal{D}_i\\ \sigma\end{array}$$

$$\exists\text{-}\mathit{convers\tilde{a}o}\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(t)\end{array}}{\exists x\,\varphi(x)}\exists I \quad \begin{array}{c}[\varphi(y)]\\ \mathcal{D}'\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\exists E \quad \text{converte para} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(t)\\ \mathcal{D}'[t/y]\\ \sigma\end{array}$$

Lema 6.3.1 *Para qualquer derivação* $\begin{array}{c}\varphi(y)\\ \mathcal{D}'\\ \sigma\end{array}$ *com y não-livre em σ e t livre para y em $\varphi(y)$,* $\begin{array}{c}\varphi(t)\\ \mathcal{D}'[t/y]\\ \sigma\end{array}$ *também é uma derivação.*

Demonstração. Indução sobre $\mathcal{D}'$. □

Torna-se um pouco mais difícil definir trilhas; lembre que trilhas foram introduzidas de modo a formalizar algo como "sucessor essencial". Em $\dfrac{\varphi\to\psi \quad \varphi}{\psi}$ não consideramos φ como sendo um "sucessor essencial" de φ (a premissa menor) pois ψ não tem qualquer relação com φ.

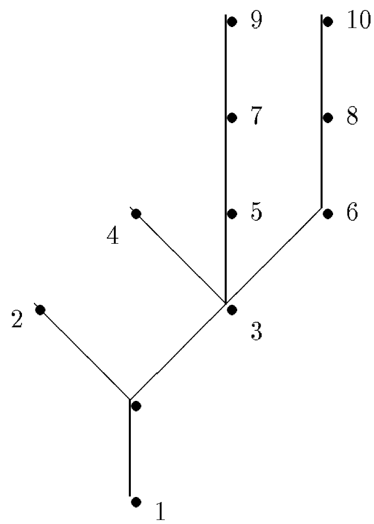
Em $\vee E$ e $\exists E$ as hipóteses canceladas têm algo a ver com a premissa maior, portanto desviamos da idéia geométrica de descer na árvore e fazemos com que uma trilha que termina em $\varphi\vee\psi$ continue através de φ e ψ (canceladas), e da mesma forma uma trilha que chega a $\exists x\varphi(x)$ continua através da $\varphi(y)$ (cancelada).

As cláusulas antigas ainda são observadas, exceto que trilhas não podem começar em hipóteses, canceladas por $\vee E$ ou $\exists E$. Além do mais, uma trilha termina (naturalmente) em uma premissa maior de $\vee E$ ou $\exists E$ se nenhuma hipótese for cancelada nessas aplicações de regras.

Exemplo.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))] \quad \dfrac{[\varphi(y)\vee\psi(y)] \quad \dfrac{[\varphi(y)]}{\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)} \quad \dfrac{[\psi(y)]}{\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)}}{\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)}}{\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)}\exists E}{\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))\to\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)}$$

Em forma de árvore:



A derivação contém as seguintes trilhas:
$(2, 4, 9, 7, 5, 3, 1)$, $(2, 4, 10, 8, 6, 3, 1)$.

Existem ainda mais problemas a serem enfrentados no caso intuicionístico:

(i) Pode haver aplicações supérfluas de $\vee E$ e $\exists E$ no sentido de que "nada é cancelado".

I.e. em $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \exists x\varphi(x) & \sigma\end{array}}{\sigma}$ nenhuma hipótese $\varphi(y)$ é cancelada em $\mathcal{D}'$.

Adicionamos conversões extras para nos livrar daquelas aplicações de regra de eliminação:

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{D} & \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma\end{array}}{\sigma} \quad \text{converte para} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_i \\ \sigma\end{array}$$

se φ e ψ não são canceladas em $\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$ respectivamente.

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \exists x\varphi(x) & \sigma\end{array}}{\sigma} \quad \text{converte para} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}' \\ \sigma\end{array}$$

se $\varphi(y)$ não é cancelada em $\mathcal{D}'$.

(ii) Uma introdução pode ser seguida por uma eliminação em uma trilha sem dar origem a uma conversão.

Exemplo.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi\vee\varphi \qquad \dfrac{[\varphi]\quad[\varphi]}{\varphi\wedge\varphi}\wedge I \qquad \dfrac{[\varphi]\quad[\varphi]}{\varphi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi\wedge\varphi}\vee E}{\varphi}\wedge E$$

Em cada trilha existe uma $\wedge$-introdução e dois passos adiante uma $\wedge$-eliminação, mas não estamos numa posição de aplicar uma redução.

Ainda não estaríamos dispostos a aceitar essa derivação como 'normal', no mínimo porque nada é deixado à propriedade da subfórmula: $\varphi\wedge\varphi$ não é nem uma subfórmula de seu predecessor na trilha, nem de seu predecessor. O problema é causado pelas repetições que podem ocorrer por causa de $\vee E$ e $\exists E$, e.g. pode-se obter uma cadeia de ocorrências da mesma fórmula:

$$\dfrac{\exists x_n\varphi_n(x_n) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\exists x_3\varphi_3(x_3) \qquad \dfrac{\exists x_2\varphi_2(x_2) \qquad \dfrac{\exists x_1\varphi_1(x_1) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \sigma\end{array}}{\sigma}}{\sigma}}{\sigma} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma}$$

Claramente as fórmulas que teriam que interagir numa redução podem estar bem distantes uma da outra. A solucção é modificar a ordem das aplicações das regras, e chamamos isso de *conversão de permutação.*

Nosso exemplo é convertido 'puxando' a $\wedge E$ para cima:

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]\quad[\varphi]}{\varphi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]\quad[\varphi]}{\varphi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi}\wedge E}{\varphi}\vee E$$

Agora podemos aplicar a $\wedge$-conversão:

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad [\varphi] \qquad [\varphi]}{\varphi}\vee E$$

Em vista das complicações adicionais temos que estender noção de *corte.*

Definição 6.3.2 Uma cadeia de ocorrências de uma fórmula σ em uma trilha que começa com o resultado de uma introdução e termina com uma eliminação é chamada de um *segmento de corte.* Um segmento de corte maximal é aquele que tem uma fórmula de corte de posto maximal.

Vimos que a eliminação no final do segmento de corte pode ser permutada para cima:

Exemplo.

$$\dfrac{\dfrac{\exists y\varphi_2(y) \qquad \dfrac{\exists x\varphi_1(x) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \sigma\end{matrix}}{\psi\to\sigma}}{\psi\to\sigma}}{\psi\to\sigma} \qquad \psi}{\sigma} \qquad \text{converte para} \qquad \dfrac{\exists y\varphi_2(y) \qquad \dfrac{\dfrac{\exists x\varphi_1(x)\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \sigma\end{matrix}}{\psi\to\sigma}}{\psi\to\sigma}\qquad \psi}{\sigma}}{\sigma}$$

e depois para

$$\dfrac{\exists y\varphi_2(y)\qquad \dfrac{\exists x\varphi_1(x)\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \sigma\end{matrix}}{\psi\to\sigma}\qquad\psi}{\sigma}}{\sigma}}{\sigma}$$

Agora podemos eliminar a fórmula de corte $\psi \to \sigma$:

$$\dfrac{\exists y\varphi_2(y)\qquad \dfrac{\exists x\varphi_1(x)\qquad \begin{matrix}\psi\\ \mathcal{D}\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}}{\sigma}$$

Portanto um segmento de corte pode ser eliminado aplicando-se uma série de conversões de permutação seguidas por uma "conversão de conectivo".

Como na linguagem menor, podemos restringir nossa atenção a aplicações da regra $\perp$ para instâncias atômicas.

Temos apenas que considerar os conectivos adicionais:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\varphi\vee\psi} \qquad \text{pode ser substituída por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}}{\varphi\vee\psi}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\exists x\varphi(x)} \qquad \text{pode ser substituída por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\varphi(y)}}{\exists x\varphi(x)}$$

Mostraremos que na lógica intuicionística derivações podem ser normalizadas. Defina o posto de corte como antes; mas agora segmentos de corte:

Definição 6.3.3 (i) O posto de um segmento de corte é o posto de sua fórmula. (ii) $d = \max\{p(\varphi) \mid \varphi$ uma fórmula de corte em $\mathcal{D}\}$, $n =$ número de segmentos de corte maximais, $pc(\mathcal{D}) = (d, n)$ com a mesma ordenação lexicográfica.

Lema 6.3.4 *Se $\mathcal{D}$ é uma derivação terminando com um segmento de corte de posto maximal tal que todos os segmentos de corte distintos desse segmento têm um posto menor, então um número de conversões de permutação reduzem $\mathcal{D}$ a uma derivação com posto de corte menor.*

Demonstração. (i) Faça as conversões de permutação sobre um segmento maximal, de modo que uma eliminação segue imediatamente uma introdução. E.g.

$$\dfrac{\dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi} \qquad > \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi}}{\varphi}}{\varphi}}{\varphi}$$

Observe que o posto de corte não aumenta. Aplicamos a conversão do "conectivo" ao corte remanescente. O resultado é uma derivação com um d mais baixo. □

Lema 6.3.5 *Se $pc(\mathcal{D}) > (0, 0)$, então existe uma $\mathcal{D}'$ tal que $\mathcal{D} > \mathcal{D}'$ e $pc(\mathcal{D}') < pc(\mathcal{D})$.*

Demonstração. Seja s um segmento maximal tal que na subderivação $\hat{\mathcal{D}})$ terminando com s nenhum outro segmento maximal ocorre. Aplique os passos de redução indicados no Lema 6.3.4, então $\mathcal{D}$ é substituída por $\mathcal{D}'$ e d não é diminuído, mas n é diminuído, ou d é diminuído. Em ambos os casos $pc(\mathcal{D} < pc(\mathcal{D}')$. □

Teorema 6.3.6 (Normalização fraca) *Cada derivação intuicionística normaliza.*

Demonstração. Aplique o Lema 6.3.5. □

Observe que a derivação pode crescer de tamanho durante as reduções, e.g.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \varphi \qquad \dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi}}{\varphi \vee \psi}\,1 \qquad \dfrac{\varphi \to \sigma \quad [\varphi]^2}{\sigma} \qquad \dfrac{\psi \to \sigma \quad [\psi]^2}{\sigma}}{\sigma}\,2$$

é reduzida por uma conversão de permutação a

$$\dfrac{\varphi \vee \varphi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{[\varphi]^2 \quad \varphi \to \sigma}{\sigma} \qquad \dfrac{[\psi]^2 \quad \psi \to \sigma}{\sigma}}{\sigma}\,2 \qquad \mathcal{D}}{\sigma}\,1$$

onde

$$\mathcal{D} \quad = \quad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{[\varphi]^3 \quad \varphi \to \sigma}{\sigma} \qquad \dfrac{[\psi]^3 \quad \psi \to \sigma}{\sigma}}{\sigma}\,3$$

Em geral, partes de derivações podem ser duplicadas.

O teorema de estrutura para derivações normais se verifica para a lógica intuicionística também; note que temos que usar a noção estendida de *trilha* e que *segmentos* podem ocorrer.

Fato 6.3.7 (i) *Em uma derivação normal, nenhuma aplicação de uma regra de introdução pode preceder uma aplicação de uma regra de eliminação.*
(ii) *Uma trilha em uma derivação normal é dividida em (no máximo) três partes: uma parte de eliminação, seguida por uma parte de* $\perp$*, seguida por uma parte de introdução. Essas partes consistem de segmentos, a última fórmula dos quais são, respectivamente, a premissa maior de uma regra de eliminação, a regra do* falsum *ou (uma regra de introdução ou a conclusão).*
(iii) *Em uma derivação normal a conclusão pertence a no mínimo uma trilha maximal.*

Teorema 6.3.8 (Propriedade da Subfórmula) *Em uma derivação normal de* $\Gamma \vdash \varphi$*, cada fórmula é uma subfórmula de uma hipótese em* Γ*, ou de* φ*.*

Demonstração. Deixo ao leitor. □

Definição 6.3.9 A relação "φ é uma *ocorrência estritamente positiva de subfórmula* de ψ" é indutivamente definida por:

(1) φ é uma ocorrência estritamente positiva de subfórmula de φ,

(2) ψ é uma ocorrência estritamente positiva de subfórmula de $\varphi \wedge \psi$, $\psi \wedge \varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\psi \vee \varphi$, $\varphi \to \psi$,

(3) ψ é uma ocorrência estritamente positiva de subfórmula de $\forall x \psi$, $\exists x \psi$.

Note que aqui consideramos ocorrências; via de regra isso será tacitamente entendido. Diremos também, para abreviar, que φ é estritamente positiva em ψ, ou que φ ocorre estritamente positiva em ψ. A extensão para conectivos e termos é óbvia, e.g. "$\forall$ é estritamente positiva em ψ".

Lema 6.3.10 (i) *O sucessor imediato da premissa maior de uma regra de eliminação é estritamente positivo nessa premissa (para* $\to E$*,* $\wedge E$*,* $\forall E$ *isso é na verdade a conclusão).* (ii) *Uma parte estritamente positiva de uma parte estritamente positiva de* φ *é uma parte estritamente positiva de* φ*.*

Demonstração. Imediata. □

Agora mostramos algumas aplicações do Teorema da Forma Normal.

Teorema 6.3.11 *Seja* $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$*, onde* Γ *não contém* $\vee$ *em subfórmulas estritamente positivas, então* $\Gamma \vdash \varphi$ *ou* $\Gamma \vdash \psi$*.*

Demonstração. Considere uma derivação normal $\mathcal{D}$ de $\varphi \vee \psi$ e uma trilha maximal t. Se a primeira ocorrência $\varphi \vee \psi$ de seu segmento pertence à parte de eliminação de t, então $\varphi \vee \psi$ é uma parte estritamente positiva da hipótese em t, que não foi cancelada. Contradição.

Daí $\varphi \vee \psi$ pertence à parte de introdução de t, e por conseguinte $\mathcal{D}$ contém uma subderivação de φ ou de ψ.

$$
\dfrac{\mathcal{D}_k \qquad \dfrac{\mathcal{D}_{k-1} \qquad \dfrac{\mathcal{D}_{k-2} \qquad \dfrac{\mathcal{D}_1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}' \\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \qquad \cdots}{\vdots} \qquad \cdots}{\varphi \vee \psi} \qquad \cdots}{\varphi \vee \psi} \qquad \cdots}{\varphi \vee \psi}
$$

Os últimos k passos são $\exists E$ ou $\vee E$. Se quaisquer deles fosse uma $\vee$-eliminação então a disjunção estaria na parte de eliminação de uma trilha e portanto um $\vee$ ocorreria estritamente positivo em alguma hipótese de Γ. Contradição.

Portanto todas as eliminações são $\exists E$. Substitua a derivação agora por:

$$
\dfrac{\mathcal{D}_k \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\mathcal{D}_2 \qquad \dfrac{\mathcal{D}_1 \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}' \\ \varphi\end{array}}{\varphi}}{\varphi} \\ \ddots \\ \varphi \end{array}}{\varphi}
$$

Nessa derivação exatamente as mesmas hipóteses foram canceladas, logo $\Gamma \vdash \varphi$. □

Considere uma linguagem sem símbolos de função (i.e. todos os termos são variáveis ou constantes).

Teorema 6.3.12 *Se $\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)$, onde Γ não contém uma fórmula existencial como uma parte estritamente positiva, então $\Gamma \vdash \varphi(t_1) \vee \ldots \vee \varphi(t_n)$, onde os termos $t_1, \ldots, t_n$ ocorrem nas hipóteses ou na conclusão.*

Demonstração. Considere um segmento final de uma derivação normal $\mathcal{D}$ de $\exists x \varphi(x)$ a partir de Γ. Segmentos finais atravessam premissas menores de $\vee E$ e $\exists E$. Nesse caso um segmento final não pode resultar de $\exists E$, pois então algum $\exists u \varphi(u)$ ocorreria estritamente positivo em Γ. Daí o segmento atravessa premissas menores de $\vee E$'s. I.e. obtemos:

$$\dfrac{\alpha_2 \vee \beta_2 \qquad \dfrac{\alpha_1 \vee \beta_1 \qquad \begin{matrix}[\alpha_1]\\ \mathcal{D}_1 \\ \exists x\varphi(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\beta_1]\\ \mathcal{D}_2\\ \exists x\varphi(x)\end{matrix}}{\exists x\varphi(x)} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \exists x\varphi(x)\end{matrix}}{\exists x\varphi(x)}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \exists x\varphi(x) \end{array}$$

$\exists x\varphi(x)$ no início de um segmento final resulta de uma introdução (do contrário ocorreria estritamente positiva em Γ), digamos de $\varphi(t_i)$. Poderia também resultar de uma regra $\perp$, mas então poderíamos inferir uma instância adequada de $\varphi(x)$.

Agora substituimos as partes de $\mathcal{D}$ produzindo os topos dos segmentos finais por partes produzindo disjunções:

$$\dfrac{\alpha_2 \vee \beta_2 \qquad \dfrac{\alpha_1 \vee \beta_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha_1]\\ \mathcal{D}_1 \\ \varphi(t_1)\end{matrix}}{\varphi(t_1) \vee \varphi(t_2)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\beta_1]\\ \mathcal{D}_2\\ \varphi(t_2)\end{matrix}}{\varphi(t_1) \vee \varphi(t_2)}}{\varphi(t_1) \vee \varphi(t_2)} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \varphi(t_3)\end{matrix}}{}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \varphi(t_1) \vee \varphi(t_2) \vee \ldots \vee \varphi(t_n) \end{array}$$

Logo $\Gamma \vdash \bigvee \varphi(t_i)$. Como a derivação era normal os vários t_i's são subtermos de Γ ou $\exists x\varphi(x)$. $\square$

Corolário 6.3.13 *Se, adicionalmente,* $\vee$ *não ocorre estritamente positivo em* Γ*, então* $\Gamma \vdash \varphi(t)$ *para um* t *apropriado.*

Corolário 6.3.14 *Se a linguagem não contém constantes, então obtemos* $\Gamma \vdash \forall x\varphi(x)$*.*

Obtivemos aqui provas construtivas das Propriedades da Disjunção e da Existência, que já tinham sido demonstradas por meios não-construtivos no Cap. 5.

Exercícios

1. Mostre que não existe fórmula φ com átomos p e q sem $\vee$ tal que $\vdash \varphi \leftrightarrow p \vee q$ (daí $\vee$ não é definível a partir dos conectivos remanescentes).

2. Se φ não contém $\rightarrow$ então $\nvdash_i \varphi$. Use isso para mostrar que $\rightarrow$ não é definível através dos conectivos remanescentes.

3. Se $\wedge$ não ocorre em φ e p e q são átomos distintos, então $\varphi \vdash p$ e $\varphi \vdash q \Rightarrow \varphi \vdash \bot$.

4. Elimine o segmento de corte $(\sigma \vee \tau)$ de

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \exists y\varphi_1(y)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \exists x\varphi_2(x)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_3\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma\vee\tau}}{\sigma\vee\tau}}{\sigma\vee\tau} \qquad \begin{matrix}[\sigma]\\ \mathcal{D}_4\\ \rho\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\tau]\\ \mathcal{D}_5\\ \rho\end{matrix}}{\rho}$$

5. Mostre que uma fórmula prenex $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\varphi$ é derivável se e somente se uma fórmula livre de quantificador apropriada, obtida a partir de φ, é derivável. Isso, em combinação com 15, produz uma outra prova do Exercício 33 na seção 5.

Observações Adicionais: Normalização forte e Church–Rosser

Como já mencionamos, existe um resultado mais forte para a dedução natural: toda seqüência de redução termina (i.e. $<_1$ é bem-fundada). Para ver as demonstrações consulte Girard 1987, Girard et al. 1989, e Troelstra–Schwichtenberg 1996. De fato, pode-se também mostrar para $<$ a chamada *propriedade de Church–Rosser* (ou *propriedade da confluência*): se $\mathcal{D} \geq \mathcal{D}_1$, $\mathcal{D} \geq \mathcal{D}_2$ então existe uma $\mathcal{D}_3$ tal que $\mathcal{D}_1 \geq \mathcal{D}_3$ e $\mathcal{D}_2 \geq \mathcal{D}_3$. Como conseqüência cada $\mathcal{D}$ tem uma *forma normal única*. Mostra-se facilmente, entretanto, que uma dada φ pode ter mais que uma derivação normal.