Uma Teoria dos Modelos Mais Curta

(Versão Parcial: 23/02/2000, 11:00h)

$\boxed{\text{Favor não distribuir}}$

Wilfrid Hodges

Traduzido do original em inglês
A Shorter Model Theory, Cambridge U.P., ©1997
por Ruy J. Guerra B. de Queiroz

Índice

1 Nomeando as partes **1**

1.1 Estruturas 2
1.2 Homomorfismos e subestruturas 5
1.3 Termos e fórmulas atômicas 10
1.4 Parâmetros e diagramas 14
1.5 Modelos canônicos 16

2 Classificando estruturas **21**

2.1 Subconjuntos definíveis 22
2.2 Classes definíveis de estruturas 29
2.3 Algumas noções provenientes de lógica 35
2.4 Funções e as fórmulas que elas preservam 41
2.5 Classificando funções por meio de fórmulas 45
2.6 Traduções 48
2.7 Eliminação de quantificadores 56

3 Estruturas que se parecem **65**

3.1 Teoremas de Skolem 65
3.2 Equivalência ida-e-volta 69
3.3 Jogos para equivalência elementar 77

4 Interpretações **87**

4.1 Automorfismos 88
4.2 Relativização 94
4.3 Interpretando uma estrutura em outra 100
4.4 Elementos imaginários 106

5 O caso de primeira ordem: compaccidade **117**

5.1 Compaccidade para a lógica de primeira ordem 118
5.2 Tipos 122
5.3 Amalgamação elementar 126
5.4 Amalgamação e preservação 133
5.5 Expandindo a linguagem 139
5.6 Indiscerníveis 143

6 O caso contável **149**
6.1 A construção de Fraïssé 149
6.2 Omissão de tipos 156
6.3 Categoricidade contável 161
6.4 Estruturas ω-categóricas pelo método de Fraïssé 165

7 O caso existencial **173**
7.1 Estruturas existencialmente fechadas 174
7.2 Construindo estruturas e.f. 178
7.3 Modelo-completude 185
7.4 Eliminação de quantificadores revisitada 191

8 Saturação **199**
8.1 O grande e o bom 200
8.2 Modelos grandes existem 208
8.3 Caracterizações sintáticas 213
8.4 Teoremas de um-cardinal e de dois-cardinais 220
8.5 Ultraprodutos e ultrapotências 224

Introdução

Mais curta que o quê?

Mais curta que um outro livro que uma vez escrevi, chamado *Teoria dos modelos* e publicado em 1993 pela Cambridge University Press. Era longo (772 páginas), por isso a Cambridge University Press me pediu uma versão mais curta para ser publicada em capa mole como um livro texto. Esta é a versão mais curta.

E o que é teoria dos modelos?

Teoria dos modelos é sobre a classificação de estruturas matemáticas, funções e conjuntos por meio de fórmulas lógicas. Pode-se classificar estruturas de acordo com quais sentenças lógicas são verdadeiras nelas; na verdade o termo 'modelo' vem do uso 'a estrutura A é um modelo da sentença ϕ', significando que ϕ é verdadeira em A. Praticantes de teoria dos modelos buscam maneiras de construir modelos de sentenças dadas; e por isso uma grande parte da teoria dos modelos é diretamente sobre construções e apenas indiretamente sobre classificação. Este livro descreve algumas construções muito bonitas, incluindo ultraprodutos, modelos de Ehrenfeucht–Mostowski e modelos existencialmente fechados.

Em 1973 C. C. Chang e Jerry Keisler caracterizaram teoria dos modelos como

álgebra universal mais lógica

Eles queriam dizer que álgebra universal estaria para estruturas assim como lógica estaria para fórmulas lógicas. Isto é bonito, mas pode sugerir que praticantes da teoria dos modelos e algebristas universais têm interesses bem próximos, o que é discutível. A caracterização também deixa de fora o fato de que quem trabalha em teoria dos modelos estuda os conjuntos definíveis em uma única estrutura por uma fórmula lógica. Neste aspecto praticantes da teoria dos modelos estão muito mais próximos a geômetras algébricos, que estudam os conjuntos de pontos definíveis por equações sobre um corpo. Um *slogan* mais atualizado poderia ser o que diz que teoria dos modelos é

geometria algébrica menos corpos

De fato alguns dos sucessos mais impressionantes da teoria dos modelos têm sido teoremas sobre a existência de soluções de equações sobre corpos. Exemplos disso são os trabalhos de Ax, Kochen e Ershov sobre a conjectura de Artin em 1965, e a prova da conjectura de Mordell–Lang para corpos de funções por Hrushovski em 1993. Ambos os exemplos estão além do escopo deste livro.

Quais os itens do livro mais longo você mais se arrepende de ter deixado de fora?

Provavelmente a construção de Hrushovski para extrair um grupo de uma configuração de Zil'ber em um conjunto fortemente minimal. A construção é difícil e excitante, mas ainda assim razoavelmente elementar. É também um gostinho das coisas importantes em teoria geométrica da estabilidade. Isto me dá um pretexto para corrigir o descuido mais embaraçoso cometido no livro mais longo (apontado por Byunghan Kim): Lema 4.7.11(c) está claramente errado, mas não há problema em continuar sem o lema.

As três outras omissões são produtos diretos (juntamente com sentenças de Horn e o teorema de Feferman–Vaught); construções de muitos modelos não-isomorfos; e um apêndice que faz um apanhado da teoria dos modelos de módulos, grupos abelianos, grupos, corpos e ordenações lineares.

Você adicionou alguma coisa?

Sim. Existe um novo capítulo demonstrando o teorema de Morley e desenvolvendo o ferramental necessário para a demonstração. Ele substitui um capítulo que dava uma boa quantidade de informação sobre categoricidade (por exemplo uma teoria completa incontavelmente categórica finitamente axiomatizada), mas poucas demonstrações. Esse novo capítulo foi escrito de olho nos cursos de pós-graduação introdutórios em teoria dos modelos.

Também adicionei a cada capítulo um conjunto de leituras sugeridas. Tais leituras variam desde embasamento filosófico ou histórico até exemplos de trabalhos nas fronteiras atuais do assunto. Elas substituem as quase quarenta páginas de referências bibliográficas do livro mais longo; os leitores que desejarem informações detalhadas sobre as fontes dos resultados podem encontrá-las lá mas não aqui.

Havia coisas no livro mais longo que você ficou particularmente satisfeito de ter sido capaz de melhorar aqui?

Afortunadamente não; há umas poucas mudanças de conteúdo. Mas acolho a oportunidade de agradecer–além das pessoas que agradeci no volume mais longo–vários colegas que generosamente me enviaram correções para o livro mais longo, notavelmente Matthias Clasen, Ed Hamada, Don Monk, Philipp Rothmaler e Gabriel Sabbagh. Uma lista de correções está disponível em ftp.maths.qmw.ac.uk/pub/preprints/hodges/mtcorrig.tex

Nota sobre notação

Tomo por base a teoria de conjuntos de Zermelo–Fraenkel, ZFC. Em particular sempre tomo como hipótese o axioma da escolha (exceto onde o axioma propriamente dito está sob discussão). Nunca assumo a hipótese do contínuo, existência de inacessíveis incontáveis, etc., sem ser honesto sobre isso.

A notação $x \subseteq y$ significa que x é um subconjunto de y; $x \subset y$ significa que x é um subconjunto próprio de y. Escrevo $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{im}(f)$ para designar o domínio e a imagem de uma função f. 'Maior que' significa maior que, nunca 'maior ou igual a'. $\wp(x)$ é o conjunto potência de x.

Ordinais são os ordinais de von Neumann, i.e. os predecessores de um ordinal α são exatamente os elementos de α. Uso os símbolos α, β, γ, δ, i, j, etc. para ordinais; δ é usualmente um ordinal limite. Um cardinal κ é o menor ordinal de cardinalidade κ, e os cardinais infinitos são listados como ω_0, ω_1 etc. Uso os símbolos κ, λ, μ, ν para cardinais; eles não são tomados como infinitos por hipótese a menos que o contexto claramente o requeira (embora eu tenha provavelmente me descuidado desse ponto uma ou duas vezes). Números naturais m, n etc. são a mesma coisa que cardinais finitos.

'Contável' significa de cardinalidade ω. Um cardinal infinito λ é um cardinal **regular** se ele não pode ser escrito como a soma de menos que λ cardinais que são todos menores que λ; do contrário ele é **singular**. Todo cardinal sucessor infinito κ^+ é regular. O menor cardinal singular é $\omega_\omega = \sum_{n<\omega} \omega_n$. A **cofinalidade** $\mathrm{cf}(\alpha)$ de um ordinal α é o menor ordinal β tal que α tem um subconjunto cofinal de tipo-ordem β; pode ser mostrado que esse ordinal β é finito ou regular. Se α e β são ordinais, $\alpha\beta$ é o ordinal produto consistindo de β cópias de α ligadas de ponta a ponta. Se κ e λ são cardinais, $\kappa\lambda$ é o cardinal produto. O contexto deve sempre demonstrar quais destes produtos é o pretendido.

Seqüências são bem-ordenadas (exceto as seqüências de indiscerníveis do Capítulo 9, e está explícito lá o que está acontecendo). Uso a notação $\bar{x}$, $\bar{a}$, etc. para seqüências $(x_0, x_1, \ldots)$, $(a_0, a_1, \ldots)$ etc., mas frouxamente: o n-ésimo termo de uma seqüência $\bar{x}$ pode ser x_n ou $x(n)$ ou algo diferente, dependendo do contexto, e algumas seqüências começam em x_1. Seqüências de comprimento finito são chamadas de **tuplas**. Os termos de uma seqüência são às vezes chamados de **itens**, para evitar a ambigüidade do termo 'termo'. A seqüência é dita **não-repetitiva** se nenhum item ocorre nela duas ou mais vezes. Se $\bar{a}$ é uma seqüência $(a_0, a_1, \ldots)$ e f é uma função, então $f\bar{a}$ é $(fa_0, fa_1, \ldots)$. O comprimento de uma seqüência σ é escrito $\mathrm{lh}(\sigma)$. Se σ é uma seqüência de comprimento m e $n \leq m$, então $\sigma|n$ é o segmento inicial consistindo dos primeiros n termos de σ. O conjunto de seqüências de comprimento γ cujos itens provêm todos do conjunto X é escrito ${}^{\gamma}X$. Logo, ${}^{n}2$ é o conjunto de n-tuplas ordenadas de 0's e 1's; ${}^{<\gamma}X$ é $\bigcup_{\alpha<\gamma} {}^{\alpha}X$. Escrevo η, ξ, θ etc. para designar ordenações lineares; η^*

é a ordenação η vista de trás para a frente.

Não distingo sistematicamente entre tuplas e cadeias. Se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são cadeias, $\bar{a}^\wedge\bar{b}$ é a cadeia concatenada consistindo de $\bar{a}$ seguido de $\bar{b}$; mas frequentemente, em nome da simplicidade, escrevo $\bar{a}\bar{b}$. Existe um conflito entre a notação usual de teoria dos modelos e a notação usual em teoria dos grupos: em teoria dos modelos xy é a cadeia consistindo de x seguido de y, mas em grupos é x vezes y. É preciso conviver com isto; mas onde há ambigüidade tenho usado $x^\wedge y$ para a cadeia concatenada e $x \cdot y$ para o produto de grupos.

A notação da teoria dos modelos é definida à medida que e quando precisamos. Os itens mais básicos aparecem no Capítulo 1 e nas primeiras cinco seções do Capítulo 2.

'Eu' significa eu, 'nós' significa nós.

Capítulo 1

Nomeando as partes

> Every person had in the beginning one only proper name, except the savages of Mount Atlas in Barbary, which were reported to be both nameless and dreamless. *William Camdem*

Neste primeiro capítulo vamos encontrar o principal assunto de estudo da teoria dos modelos: estruturas.

Todo matemático manipula estruturas de algum tipo – seja módulos, grupos, anéis, corpos, reticulados, ordenações parciais, álgebras de Banach, ou qualquer que seja. Este capítulo definirá as noções básicas como 'elemento', 'homomorfismo', 'subestrutura', e as definições não são feitas para trazer qualquer surpresa. A noção de um 'diagrama' (de Robinson) de uma estrutura pode parecer um pouco estranha à primeira vista, mas na verdade nada mais é do que uma generalização da tabela de multiplicação de um grupo.

De qualquer forma existe algo que o leitor pode achar incômodo. Praticantes da teoria dos modelos estão sempre falando sobre símbolos, nomes e rótulos. Um praticante da teoria dos grupos expressará um grupo abeliano com a mesma satisfação seja multiplicativamente ou aditivamente, qualquer que seja o mais conveniente para o problema em questão. Não é o caso do praticante da teoria dos modelos: para ele ou ela o grupo com '$\cdot$' é uma estrutura e o grupo com '$+$' é uma estrutura diferente. Modifique o nome e você modificará a estrutura.

Isto pode parecer pedante. Teoria dos modelos tem sua origem em lógica matemática, e não posso negar que alguns lógicos destacados têm sido pedantes quando se trata de símbolos. Entretanto existem várias boas razões para que praticantes da teoria dos modelos assumam a perspectiva que normalmente assumem. Por agora, permita-me mencionar duas delas.

Em primeiro lugar, estaremos frequentemente querendo comparar duas estruturas e estudar homomorfismos de uma para a outra. O que é um homomorfismo? No caso particular de grupos, um homomorfismo de um grupo G para um grupo H é uma função que associa multiplicação em G com multiplicação em H. Existe uma maneira óbvia de generalizar esta noção para estruturas arbitrárias: um homomorfismo de uma estrutura A para uma estrutura B é uma função que associa cada operação de A *à operação com o mesmo nome em* B.

Em segundo lugar, frequentemente vamos querer construir uma estrutura com certas propriedades. Uma das máximas da teoria dos modelos é a seguinte: *primeiro dê nome aos elementos de sua estrutura, e só então decida como eles devem se comportar*. Se os nomes são bem escolhidos, eles servirão tanto como um apoio para a construção, quanto como matéria prima.

Aha – diz o praticante da teoria dos grupos – vejo que você não está realmente falando sobre símbolos *escritos* de forma alguma. Para os objetivos que você descreveu, você precisa apenas de ter rótulos formais para algumas partes da estrutura. Deve ser um tanto irrelevante que tipos de coisas os seus rótulos são; você pode até querer dispor de uma quantidade incontável deles.

Correto. Na realidade vamos seguir o exemplo de A. I. Mal'tsev e não impor quaisquer restrições sobre o que pode servir como um nome. Por exemplo, qualquer ordinal pode ser um nome, e qualquer objeto matemático pode servir como um nome para si próprio. Os itens chamados 'símbolos' nesse livro não precisam ser símbolos escritos. Eles nem sequer precisam ser símbolos sonhados.

1.1 Estruturas

Vamos começar com uma definição de 'estrutura'. Teria sido possível dar a partida no assunto com uma definição mais ágil – digamos deixando fora as cláusulas (1.2) e (1.4) abaixo. Porém um algo mais de generalidade nesse estágio nos economizará infindáveis complicações mais tarde.

Uma **estrutura** A é um objeto com os quatro seguintes ingredientes.

(1.1) Um conjunto chamado de **domínio** de A, escrito $\mathrm{dom}(A)$ ou $\mathrm{dom}\, A$ (algumas pessoas o chamam de **universo** ou **portador** de A). Os elementos de $\mathrm{dom}(A)$ são chamados de **elementos** da estrutura A. A **cardinalidade** de A, em símbolos $|A|$, é definida como sendo a cardinalidade $|\mathrm{dom}\, A|$ de $\mathrm{dom}(A)$.

(1.2) Um conjunto de elementos de A chamados de **elementos constantes**, cada um dos quais é nomeado por uma ou mais **constantes**. Se c é uma constante, escrevemos c^A para designar o elemento constante nomeado por c.

(1.3) Para cada inteiro positivo n, um conjunto de relações n-árias sobre $\mathrm{dom}(A)$ (i.e. subconjuntos de $(\mathrm{dom}\ A)^n$), cada uma das quais é nomeada por um ou mais **símbolos de relação** n-ários. Se R é um símbolo de relação, escrevemos R^A para designar a relação nomeada por R.

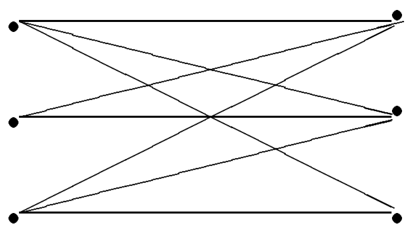
(1.4) Para cada inteiro positivo n, um conjunto de operações n-árias sobre $\mathrm{dom}(A)$ (i.e. funções de $(\mathrm{dom}\, A)^n$ para $\mathrm{dom}(A)$), cada uma das quais é nomeada por um ou mais **símbolos de função** n-ários. Se F é um símbolo de função, escrevemos F^A para designar a função nomeada por F.

Exceto onde dissermos o contrário, quaisquer dos conjuntos (1.1)–(1.4) podem ser vazios. Como mencionado no capítulo de introdução, os 'símbolos' de constante, relação e função podem ser quaisquer objetos matemáticos, não necessariamente símbolos escritos; mas em nome da paz de espírito normalmente se supõe que, por exemplo, um símbolo 3-ário de relação não aparece também como um símbolo 3-ário de função ou um símbolo 2-ário de relação. Usaremos letras maiúsculas A, B, C, ... para estruturas.

Seqüências de elementos de uma estrutura são escritas $\bar{a}$, $\bar{b}$ etc. Uma **tupla em** A (ou **de** A) é uma seqüência finita de elementos de A; é uma n-tupla se tem comprimento n. Usualmente deixamos para o contexto a determinação do comprimento de uma seqüência ou tupla.

Isto conclui a definição de 'estrutura'.

Exemplo 1: ***Grafos.*** Um **grafo** consiste de um conjunto V (o conjunto de **vértices**) e um conjunto E (o conjunto de **arestas**), onde cada aresta é um conjunto de dois vértices distintos. Diz-se que uma aresta (v, w) **liga** os dois vértices v e w. Podemos fazer uma figura representando um grafo finito usando pontos para os vértices e a ligação de dois vértices v, w sendo realizada por uma linha quando (v, w) é uma aresta:



Uma maneira natural de fazer de um grafo G uma estrutura é a seguinte. Os elementos de G são os vértices. Existe uma relação binária R^G; o par ordenado (v, w) pertence à relação R^G se e somente se existe uma aresta ligando v a w.

Exemplo 2: ***Ordenações lineares.*** Suponha que $\leqslant$ ordena um conjunto X. Então podemos fazer de $(X, \leqslant)$ uma estrutura A como segue. O domínio de A é o conjunto X. Existe um símbolo binário de relação R, e sua interpretação R^A é a ordenação $\leqslant$. (Na prática escreveríamos o símbolo de relação como $\leqslant$ ao invés de R.)

Exemplo 3: ***Grupos.*** Podemos pensar num grupo como uma estrutura G com uma constante 1 nomeando a identidade 1^G, um símbolo de função $\cdot$ nomeando a operação produto do grupo $\cdot^G$, e um símbolo unário de função $^{-1}$ nomeando a operação de tomar o inverso $^{(-1)^G}$. Um outro grupo H terá os mesmos símbolos 1, $\cdot$, $^{-1}$; então 1^H é o elemento identidade de H, $\cdot^H$ é a operação produto de H, e assim por diante.

Exemplo 4: ***Espaços vetoriais.*** Existem várias maneiras de fazer de um espaço vetorial uma estrutura, mas aqui vai a mais conveniente. Suponha que V é um espaço vetorial sobre um corpo de escalares K. Tome o domínio de V como sendo o conjunto de vetores de V. Existe um elemento constante 0^V, a origem do espaço vetorial. Existe uma operação binária, $+^V$, que é a adição de vetores. Existe uma operação 1-ária $-^V$ para o inverso aditivo; e para todo escalar k existe uma operação 1-ária k^V para representar a multiplicação de um vetor por k. Dessa forma cada escalar serve como um símbolo 1-ário de função.

(Na verdade o símbolo '$-$' é redundante, porque $-^V$ é a mesma operação que $(-1)^V$.)

Quando falarmos de espaços vetoriais mais adiante, assumiremos que eles são estruturas dessa forma (a menos que algo seja dito em contrário). O mesmo vale para módulos, substituindo o corpo K por um anel.

Duas perguntas vêm à mente. Primeiro, esses exemplos não são um pouco arbitrários? Por exemplo, por que atribuímos à estrutura de grupo um símbolo para o inverso multiplicativo $^{-1}$, mas não demos um símbolo para o comutador $[\,,\,]$? Por que introduzimos na estrutura de ordenação linear um símbolo para a ordenação $\leqslant$, mas nenhum para a ordenação estrita correspondente $<$?

A resposta é sim; essas escolhas foram arbitrárias. Mas algumas escolhas são mais sensatas que outras. Voltaremos a este ponto na próxima seção.

Em segundo lugar, o que é *exatamente* uma estrutura? Nossa definição não disse nada sobre a forma pela qual os ingredientes (1.1)–(1.4) são empacotados em uma única entidade.

Verdadeiro novamente. Mas esta foi um descuido deliberado – os arranjos para o empacotamento não terão importância para nós. Alguns autores definem A como sendo um par ordenado $\langle \mathrm{dom}(A), f\rangle$ onde f é uma função associando a cada símbolo S um item S^A correspondente. O importante é saber o que os símbolos e os ingredientes são, e isso pode ser indicado de qualquer forma razoável.

Por exemplo um praticante da teoria dos modelos pode se referir à estrutura

$$\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leqslant\rangle.$$

Com um pouco de bom senso o leitor pode adivinhar que isso se refere à estrutura cujo domínio é o conjunto dos números reais, com constantes 0 e 1 nomeando os números 0 e 1, um símbolo 2-ário de relação $\leqslant$ nomeando a relação $\leqslant$, símbolos 2-ários de função $+$ e $\cdot$ nomeando adição e multiplicação respectivamente, e um símbolo 1-ário de função nomeando a troca de sinal.

Signaturas

A **signatura** de uma estrutura A é especificada fornecendo-se

(1.5) o conjunto de constantes de A, e para cada $n > 0$, o conjunto de símbolos n-ários de relação e o conjunto de símbolos n-ários de função de A.

Assumiremos que a signatura de uma estrutura pode ser lida de forma única a partir da estrutura.

O símbolo L será usado para representar signaturas. Mais adiante ele também servirá para linguagens – pense na signatura de A como uma espécie de linguagem rudimentar para falar sobre A. Se A tem signatura L, dizemos que A é uma L-**estrutura**.

Uma signatura L sem símbolos de constante or símbolos de função é chamada de uma **signatura relacional**, e uma L-estrutura é chamada de **estrutura relacional**. Uma signatura sem símbolos de relação às vezes é chamada de **signatura algébrica**.

Exercícios para a seção 1.1

1. Segundo Tomaz de Aquino, Deus é uma estrutura G com três elementos '*pater*', '*filius*' e '*spiritus sanctus*', em uma signatura consistindo de uma relação binária assimétrica ('*relatio opposita*') R, lida como '*relatio originis*'. Tomaz de Aquino assevera também que os três elementos podem ser identificados unicamente em termos de R^G. Deduza – como o fez Tomaz de Aquino – que se os pares (*pater*, *filius*) e (*pater*, *spiritus sanctus*) estão em R^G, então exatamente um dos pares (*filius*, *spiritus sanctus*) ou (*spiritus sanctus*, *filius*) pertence a R^G.

2. Seja X um conjunto e L uma signatura; escreva $\kappa(X, L)$ para designar o número de L-estruturas distintas que têm domínio X. Mostre que se X é um conjunto finito então $\kappa(X, L)$ é ou finito ou no mínimo 2^ω.

1.2 Homomorfismos e subestruturas

A seguinte definição tem o propósito de abarcar, de uma só vez, virtualmente todas as coisas que podem ser chamadas de 'homomorfismos' em qualquer ramo de álgebra.

Seja L uma signatura e sejam A e B L-estruturas. Por um **homomorfismo** f de A para B, em símbolos $f : A \to B$, queremos dizer uma função f de $\mathrm{dom}(A)$ para $\mathrm{dom}(B)$ com as três seguintes propriedades.

(2.1) Para cada constante c de L, $f(c^A) = c^B$.

(2.2) Para cada $n > 0$ e cada símbolo n-ário de relação R de L e n-tupla $\bar{a}$ de A, se $\bar{a} \in R^A$ então $f\bar{a} \in R^B$.

(2.3) Para cada $n > 0$ e cada símbolo n-ário de função F de L e n-tupla $\bar{a}$ de A, $f(F^A(\bar{a})) = F^B(f\bar{a})$.

(Se $\bar{a}$ é $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ então $f\bar{a}$ significa $(fa_0, \ldots, fa_{n-1})$; cf. Nota sobre notação.) Por uma **imersão** de A em B queremos dizer um homomorfismo $f : A \to B$ que é injetivo e satisfaz à seguintes versãos mais forte de (2.2).

(2.4) Para cada $n > 0$, cada símbolo n-ário de relação R de L e cada n-tupla $\bar{a}$ de A, $\bar{a} \in R^A \Leftrightarrow f\bar{a} \in R^B$.

Um **isomorfismo** é uma imersão sobrejetora. Homomorfismos $f : A \to A$ são chamados de **endomorfismos** de A. Isomorfismos $f : A \to A$ são chamados de **automorfismos** de A.

Por exemplo, se G e H são grupos e $f : G \to H$ é um homomorfismo, então (2.1) diz que $f(1^G) = 1^H$, e (2.3) diz que para todos os elementos a, b de G, $f(a \cdot^G b) = f(a) \cdot^H f(b)$ e $f(a^{(-1)^G}) = f(a)^{(-1)^H}$. Isso é exatamente o que diz a definição usual de homomorfismo entre grupos. Cláusula (2.2) não adiciona nada neste caso já que não existem símbolos de relação na signatura. Pela mesma razão (2.4) é vácua para grupos. Assim um homomorfismo entre grupos é uma imersão se e somente se ele é um homomorfismo injetivo.

Algumas vezes escrevemos 1_A para designar a função identidade sobre $\mathrm{dom}(A)$. Claramente trata-se de um homomorfismo de A em A, na realidade um automorfismo de A. Dizemos que A é **isomorfa** a B, em símbolos $A \cong B$, se existe um isomorfismo de A para B.

Os seguintes fatos são quase todos conseqüências imediatas das definições.

Teorema 1.2.1. *Seja L uma signatura.*

(a) *Se A, B, C são L-estruturas e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são homomorfismos, então a função composta gf é um homomorfismo de A para C. Se, ainda mais, f e g são ambas imersões então gf também o é.*

(b) *Se A e B são L-estruturas e $f : A \to B$ é um homomorfismo então $1_B f = f = f 1_A$.*

(c) *Sejam A, B, C L-estruturas. Então 1_A é um isomorfismo. Se $f : A \to B$ é um isomorfismo então a função inversa $f^{-1} : \mathrm{dom}(B) \to \mathrm{dom}(A)$ existe e é um isomorfismo de B para A. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são isomorfismos então gf também o é.*

(d) *A relação $\cong$ é uma relação de equivalência sobre a classe de L-estruturas.*

(e) *Se A, B são L-estruturas, $f : A \to B$ é um homomorfismo e existem homomorfismos $g : B \to A$ e $h : B \to A$ tal que $gf = 1_A$ e $fh = 1_B$, então f é um isomorfismo e $g = h = f^{-1}$.*

Demonstração. (e) $g = g1_B = gfh = 1_A h = h$. Já que $gf = 1_A$, f é uma imersão. Dado que $fh = 1_B$, f é sobrejetora. □

Subestruturas

Se A e B são L-estruturas com $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ e a função inclusão $i : \mathrm{dom}(A) \to \mathrm{dom}(B)$ for uma imersão, então dizemos que B é uma **extensão** de A, ou que A é uma **subestrutura** de B, em símbolos $A \subseteq B$. Note que se i é a função inclusão de $\mathrm{dom}(A)$ para $\mathrm{dom}(B)$, então a condição (2.1) acima diz que $c^A = c^B$ para cada constante c, condição (2.2) diz que $R^A = R^B \cap (\mathrm{dom}\, A)^n$ para cada símbolo de relação R, e finalmente condição (2.3) diz que $F^A = F^B|(\mathrm{dom}\, A)^n$ (a restrição de F^B a $(\mathrm{dom}\, A)^n$) para cada símbolo n-ário de função F.

Quando é que um conjunto de elementos de uma estrutura formam o domínio de uma subestrutura? O próximo lema nos dá um critério.

Lema 1.2.2. *Seja B uma L-estrutura e X um subconjunto de $\mathrm{dom}(B)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *$X = \mathrm{dom}(A)$ para algum $A \subseteq B$.*

(b) *Para toda constante c de L, $c^B \in X$; e para todo $n > 0$, todo símbolo n-ário de função F de L e toda n-tupla $\bar{a}$ de elementos de X, $F^B(\bar{a}) \in X$.*

Se (a) *e* (b) *se verificam, então A é unicamente determinada.*

Demonstração. Suponha que (a) se verifica. Então para toda constante c de L, $c^B = c^A$ pela condição (2.1); mas $c^A \in \mathrm{dom}(A) = X$, logo $c^B \in X$. Igualmente, para cada símbolo n-ário de função F de L e cada n-tupla $\bar{a}$ de elementos de X, $\bar{a}$ é uma n-tupla em A e por isso $F^B(\bar{a}) = F^A(\bar{a}) \in \mathrm{dom}(A) = X$. Isto demonstra (b).

Na direção inversa, se (b) se verifica, então podemos definir A colocando $\mathrm{dom}(A) = X$, $c^A = c^B$ para cada constante c de L, $F^A = F^B|X^n$ para cada símbolo n-ário de função F de L, e $R^A = R^B \cap X^n$ para cada símbolo n-ário de relação R de L. Então $A \subseteq B$; além do mais esta é a única definição possível de A, dado que $A \subseteq B$ e $\mathrm{dom}(A) = X$. □

Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Então segue-se facilmente do Lema 1.2.2 que existe uma única subestutura A de B cujo domínio inclui Y; chamamos A de **subestrutura de B gerada por Y**, ou a **envoltória** de Y em B, em símbolos $A = \langle Y\rangle_B$. Chamamos Y de um **conjunto de geradores** para A. Uma estrutura B é dita **finitamente gerada** se B é da forma $\langle Y\rangle_B$ para algum conjunto finito Y de elementos.

Quando o contexto permite, escrevemos simplesmente $\langle Y\rangle$ ao invés de $\langle Y\rangle_B$. Às vezes é conveniente listar os geradores Y como uma seqüência $\bar{a}$; então escrevemos $\langle\bar{a}\rangle_B$ para designar $\langle Y\rangle_B$.

Para muitos propósitos necessitaremos de saber a cardinalidade da estrutura $\langle Y\rangle_B$. Isto pode ser estimado como se segue. Definimos a **cardinalidade** de L, em símbolos $|L|$, como sendo o menor cardinal infinito $\geqslant$ ao número de símbolos em L. (Na verdade veremos no Exercício 2.1.7 abaixo que $|L|$ é igual ao número de fórmulas de primeira ordem de L, a menos de escolha de variáveis; esta é uma razão pela qual $|L|$ é tomada como sendo infinita mesmo quando L contém apenas um número finito de símbolos.

Advertência. Ocasionalmente é importante saber que uma signatura L contém apenas um número finito de símbolos. Neste caso dizemos que L é **finita**, apesar da definição que acabamos de dar para $|L|$. Veja Exercício 6.

Teorema 1.2.3. *Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Então $|\langle Y\rangle_B| \leqslant |Y| + |L|$.*

Demonstração. Vamos construir $\langle Y\rangle_B$ explicitamente, portanto demonstrar sua existência e unicidade ao mesmo tempo. Definimos um conjunto $Y_m \subseteq \mathrm{dom}(B)$ para cada $m < \omega$, por indução sobre m:

$$\begin{aligned} Y_0 = {} & Y \cup \{c^B : c \text{ uma constante de } L\}, \\ Y_{m+1} = {} & Y_m \cup \{F^B(\bar{a}) : \text{ para algum } n > 0,\ F \text{ é um símbolo } n\text{-ário de} \\ & \text{função } L \text{ e } \bar{a} \text{ é uma } n\text{-tupla de elementos de } Y_m\}. \end{aligned}$$

Finalmente definimos $X = \bigcup_{m<\omega} Y_m$. Claramente X satisfaz a condição (b) do Lema 1.2.2, logo pelo mesmo lema existe uma única subestrutura A de B com $X = \mathrm{dom}(A)$. Se A' é uma subestrutura qualquer de B com $Y \subseteq \mathrm{dom}(A')$, então por indução sobre m vemos que cada Y_m está incluído em $\mathrm{dom}(A')$ (pela implicação (a)$\Rightarrow$(b) no Lema 1.2.2), e por isso $X \subseteq \mathrm{dom}(A')$. Por conseguinte A é a menor (e única) subestrutura de B cujo domínio inclui Y, abreviadamente $A = \langle Y\rangle_B$.

Agora vamos estimar a cardinalidade de A. Ponha $\kappa = |Y|+|L|$. Claramente $|Y_0| \leqslant \kappa$. Para cada n fixo, se Z é um subconjunto de $\mathrm{dom}(B)$ de cardinalidade $\leqslant \kappa$, então o conjunto

$$\{F^B(\bar{a}) : \ F \text{ é um símbolo } n\text{-ário de função } L \text{ e } \bar{a} \in Z^n\}$$

tem cardinalidade no máximo $\kappa \cdot \kappa^n = \kappa$, já que κ é infinito. Por conseguinte se $|Y_m| \leqslant \kappa$, então $|Y_{m+1}| \leqslant \kappa + \kappa = \kappa$. Logo por indução sobre m, cada $|Y_m| \leqslant \kappa$, e portanto $|X| \leqslant \omega \cdot \kappa = \kappa$. Como $|\langle Y\rangle_B| = |X|$ por definição, isto prova o teorema. □

Escolha de signatura

Como dissemos anteriormente, um mesmo objeto matemático pode ser interpretado como uma estrutura de diversas maneiras. A mesma função ou relação pode ser nomeada por diferentes símbolos: por exemplo o elemento identidade em um grupo pode ser chamado e ou 1. Nós também temos alguma escolha até mesmo sobre quais elementos, funções ou relações devem ser nomeados. Um grupo certamente deveria ter um nome como $\cdot$ para a operação de produto; dever-se-ia também ter nomes como $^{-1}$ e 1 para o inverso e a identidade? Que tal $[\ ,\ ]$ para o comutador, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$?

Um princípio geral saudável é aquele que diz que, quando as coisas são iguais, *signaturas devem ser escolhidas de tal forma que as noções de homomorfismo e subestrutura concordem com as noções usuais para os ramos relevantes da matemática*.

Por exemplo no caso de grupos, se a única operação nomeada é o produto $\cdot$, então as subestruturas de um grupo serão seus subsemigrupos, fechados sob $\cdot$ mas não necessariamente contendo inversos ou identidade. Se nomeamos $\cdot$ e a identidade 1, então as subestruturas serão os submonóides. Para assegurar que subestrutura coincide com subgrupo, precisamos também de introduzir um símbolo para $^{-1}$. Dado que os símbolos para $\cdot$ e $^{-1}$ são incluídos, obteríamos exatamente as mesmas subestruturas e homomorfismos se também incluíssemos um símbolo para o comutador; a maior parte dos praticantes da teoria dos modelos usam a lâmina de Ockham e o deixam de fora.

Portanto para algumas classes de objetos existe uma escolha natural de signatura. Para grupos a escolha natural é nomear $\cdot$, 1 (ou e) e $^{-1}$; chamamos esta de **signatura de grupos**. Sempre assumiremos (a menos que algo seja dito em contrário) que anéis têm um 1. Portanto a escolha natural de signatura para anéis é nomear $+$, $-$, $\cdot$, 0 e 1; chamamos esta de **signatura de anéis**. A **signatura de ordenações parciais** tem apenas o símbolo $\leqslant$. A **signatura de reticulados** tem apenas $\wedge$ e $\vee$.

E se quiséssemos adicionar novos símbolos, por exemplo nomear um determinado elemento? As próximas definições tratam dessa situação.

Redução e expansão

Suponha que L^- e L^+ são signaturas, e L^- é um subconjunto de L^+. Então se A é uma L^+-estrutura, podemos tornar A uma L^--estrutura simplesmente esquecendo os símbolos de L^+ que não estão em L^-. (Não removemos qualquer elemento de A, embora alguns elementos constantes em A podem deixar de ser elementos constantes na nova estrutura.) A L^--estrutura resultante é chamada de **L^--reduto** de A ou o **reduto de A para L^-**, em símbolos $A|L^-$. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de L^+-estruturas, então a mesma função f é também um homomorfismo $f : A|L^- \to B|L^-$ de L^--estruturas.

Quando A é uma L^+-estrutura e C é o seu L^--reduto, dizemos que A é uma **expansão** de C para L^+. Em geral C pode ter muitas expansões distintas para L^+ diferentes. Há uma notação útil embora imprecisa para expansões. Suponha que os símbolos que estão em L^+ mas não estão em L^- sejam as constantes c, d e um símbolo de função F; então c^A, d^A são respectivamente elementos a, b de A, e F^A é alguma operação f sobre dom(A). Escrevemos:

$$A = (C, a, b, f) \tag{2.5}$$

para expressar que A é uma expansão de C obtida pela adição de símbolos para nomear a, b e f. A notação é imprecisa porque ela não diz quais símbolos são usados para nomear a, b e f respectivamente; mas frequentemente a escolha de símbolos é irrelevante ou óbvia a partir do contexto.

Exercícios para a seção 1.2

1. Verifique todas as partes do Teorema 1.2.1.

2. Seja L uma signatura e $\mathbf{K}$ uma classe de L-estruturas. Suponha que A e B estão em $\mathbf{K}$, e que para toda estrutura C em $\mathbf{K}$ existem homomorfismos únicos $f : A \to C$ e $g : B \to C$. Mostre que existe um único isomorfismo de A para B.

3. Sejam A, B L-estruturas, X um subconjunto de $\mathrm{dom}(A)$ e $f : \langle X \rangle_A \to B$ e $g : \langle X \rangle_A \to B$ homomorfismos. Mostre que se $f|X = g|X$ então $f = g$.

4. Demonstre a seguinte afirmação, na qual todas as estruturas são supostas L-estruturas para alguma signatura fixa L.

(a) Todo homomorfismo $f : A \to C$ pode ser fatorado como $f = hg$ para algum homomorfismo sobrejetor $g : A \to B$ e extensão $h : B \to C$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "h"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

A única estrutura B é chamada de **imagem** *de g,* $\mathrm{im}\, g$ *para abreviar. Generalizando, dizemos que uma L-estrutura B é uma* **imagem homomórfica** *de A se existe um homomorfismo sobrejetor $g : A \to B$.*

(b) Toda imersão $f : A \to C$ pode ser fatorada como $f = hg$ onde g é uma extensão e h é um isomorfismo. *Trata-se de uma pequena parte da teoria de conjuntos que frequentemente é varrida para baixo do tapete. Ela diz que quando tivermos uma imersão de A em C, podemos assumir que A é uma subestrutura de C. A imersão dos racionais nos reais é um exemplo familiar.*

5. Sejam A e B L-estruturas com A uma subestrutura de B. Uma **retração** de B para A é um homomorfismo $f : B \to A$ tal que $f(a) = a$ para todo elemento a de A. Mostre que (a) se $f : B \to A$ é uma retração, então $f^2 = f$, (b) se B é uma L-estrutura qualquer e f é um endomorfismo de B tal que $f^2 = f$, então f é uma retração de B para uma subestrutura A de B.

6. Seja L uma signatura finita sem símbolos funcionais. (a) Mostre que toda L-estrutura finitamente gerada é finita. (b) Mostre que para cada $n < \omega$ existem, a menos de isomorfismo, apenas um número finito de L-signaturas de cardinalidade n.

7. Mostre que podemos definir a signatura de corpos de tal forma que subestrutura = subcorpo, e homomorfismo = imersão de corpos, desde que façamos $0^{-1} = 0$. *A maioria dos matemáticos parecem resistir a isso, daí o costume normal é dar a corpos a mesma signatura que se dá a anéis.*

8. Muitos praticantes da teoria dos modelos requerem que o domínio de qualquer estrutura seja não-vazio. Como isso afetaria o Lema 1.2.2 e a definição de $\langle Y \rangle_B$?

9. Dê um exemplo de uma estrutura de cardinalidade ω_2 que tenha uma subestrutura de cardinalidade ω mas nenhuma subestrutura de cardinalidade ω_1.

1.3 Termos e fórmulas atômicas

No Capítulo 2 vamos introduzir um número de linguagens formais para falar de L-estruturas. Todas essas linguagens serão construídas a partir de fórmulas atômicas de L, que agora devemos definir.

Cada fórmula atômica será uma cadeia de símbolos incluindo os símbolos de L. Como os símbolos em L podem ser quaisquer tipos de objeto e não necessariamente expressões escritas, a idéia de uma 'cadeia de símbolos' tem que ser tomada com uma pitada de codificação em teoria dos conjuntos.

Termos

Toda linguagem tem um estoque de **variáveis**. São símbolos escritos v, x, y, z, t, x_0, x_1, etc., e um dos seus propósitos é servir como rótulos temporários para elementos de uma estrutura. Qualquer símbolo pode ser usado como uma variável, desde que ele ainda não tenha sido usado para algo diferente. A escolha de variáveis nunca é importante, e para os propósitos teóricos muitos praticantes da teoria dos modelo as restringem às expressões do tipo v_0, v_1, v_2, ... com números naturais ou ordinais como índices.

Os **termos** da signatura L são cadeias de símbolos definidos como se segue (onde assume-se que os símbolos '(', ')' e ',' não ocorrem em qualquer outra parte de L – daqui por diante observações como esta não serão mais levantadas).

(3.1) Toda variável é um termo de L.

(3.2) Toda constante de L é um termo de L.

(3.3) Se $n > 0$, F é um símbolo n-ário de função de L e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de L então a expressão $F(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo de L.

(3.4) Nada mais é um termo de L.

Um termo é dito **fechado** (cientistas da computação dizem **básico**) se nenhuma variável ocorre nele. A **complexidade** de um termo é o número de símbolos ocorrendo nele, contando cada ocorrência separadamente. (O que é importante é que se t ocorre como parte de s então s tem complexidade maior que a de t.)

Se introduzimos um termo t como $t(\bar{x})$, isto sempre significará que $\bar{x}$ é uma seqüência $(x_0, x_1, \ldots)$, possivelmente infinita, de variáveis distintas, e toda variável que ocorre em t está entre as variáveis em $\bar{x}$. Mais adiante no mesmo contexto poderemos escrever $t(\bar{s})$, onde $\bar{s}$ é uma seqüência de termos $(s_0, s_1, \ldots)$; então $t(\bar{s})$ denota o termo obtido a partir de t colocando-se s_0 no lugar de x_0, s_1 no lugar de x_1, etc., ao longo do termo t. (Por exemplo, se $t(x, y)$ é o termo $y + x$, então $t(0, 2y)$ é o termo $2y + 0$ e $(t(t(x, y), y)$ é o termo $y + (y + x)$.)

Para fazer com que variáveis e termos representem elementos de uma estrutura, usamos a seguinte convenção. Seja $t(\bar{x})$ um termo de L, onde $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Seja A uma L-estrutura e $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ uma seqüência de elementos de A; assumimos que $\bar{a}$ é pelo menos tão longa quanto $\bar{x}$. Então $t^A(\bar{a})$ (ou

$t^A[\bar{a}]$ quando precisarmos de uma notação mais diferenciada) é definido como sendo o elemento de A que é nomeado por t quando x_0 é interpretado como um nome de a_0, e x_1 como um nome de a_1, e assim por diante. Mais precisamente, usando indução sobre a complexidade de t,

(3.5) se t é a variável x_i, então $t^A[\bar{a}]$ é a_i,

(3.6) se t é uma constante c então $t^A[\bar{a}]$ é o elemento c^A,

(3.7) se t é da forma $F(s_1, \ldots, s_n)$ onde cada s_i é um termo $s_i(\bar{x})$, então $t^A[\bar{a}]$ é o elemento $F^A[{s_1}^A[\bar{a}], \ldots, {s_n}^A[\bar{a}])$.

(Cf. (1.2), (1.4) acima.) Se t é um termo fechado então $\bar{a}$ não tem qualquer efeito, e aí escrevemos simplesmente t^A para designar $t^A[\bar{a}]$.

Fórmulas atômicas

As **fórmulas atômicas** de L são as cadeias de símbolos dadas por (3.8) e (3.9) abaixo.

(3.8) Se s e t são termos de L, então a cadeia $s = t$ é uma fórmula atômica de L.

(3.9) Se $n > 0$, R é um símbolo n-ário de relação de L e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de L então a expressão $R(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica de L.

(Note que o símbolo '=' não é suposto ser um símbolo de relação na signatura.) Uma **sentença atômica** de L é uma fórmula atômica na qual não ocorrem variáveis.

Tal qual no caso dos termos, se introduzimos uma fórmula atômica ϕ como $\phi(\bar{x})$, então $\phi(\bar{s})$ denota a fórmula atômica obtida a partir de ϕ colocando-se termos da seqüência $\bar{s}$ no lugar de todas as ocorrências das variáveis correspondentes de $\bar{x}$.

Se as variáveis $\bar{x}$ em uma fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ são interpretadas como nomes de elementos $\bar{a}$ em uma estrutura A, então ϕ faz um enunciado sobre A. O enunciado pode ser verdadeiro ou falso. Se for verdadeiro, dizemos que ϕ é **verdadeiro de** $\bar{a}$ **em** A, ou que $\bar{a}$ **satisfaz** ϕ **em** A, em símbolos

$$A \vDash \phi[\bar{a}] \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad A \vDash \phi(\bar{a}).$$

Podemos dar uma definição formal a esta relação $\vDash$. Seja $\phi(\bar{x})$ uma fórmula atômica de L com $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Seja A uma L-estrutura e $\bar{a}$ uma seqüência $(a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de A; vamos assumir que $\bar{a}$ é pelo menos tão longa quanto $\bar{x}$. Então

(3.10) se ϕ é a fórmula $s = t$ onde $s(\bar{x})$, $t(\bar{x})$ são termos, então $A \vDash \phi[\bar{a}]$ sse $s^A[\bar{a}] = t^A[\bar{a}]$,

(3.11) se ϕ é a fórmula $R(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_1(\bar{x})$, ..., $s_n(\bar{x})$ são termos, então $A \vDash \phi[\bar{a}]$ sse a n-tupla ordenada $({s_1}^A[\bar{a}], \ldots, {s_n}^A[\bar{a}])$ pertence a R^A.

(Cf. (1.3) acima.) Quando ϕ é uma sentença atômica, podemos omitir a seqüência $\bar{a}$ e escrever simplesmente $A \vDash \phi$ no lugar de $A \vDash \phi[\bar{a}]$.

Dizemos que A é um **modelo** de ϕ, ou que ϕ é **verdadeiro em** A, se $A \vDash \phi$. Quando T é um conjunto de sentenças atômicas, dizemos que A é um **modelo** de T (em símbolos, $A \vDash T$) is A é um modelo de toda sentença atômica em T.

Teorema 1.3.1. *Sejam A e B L-estruturas e f uma função de* dom(A) *para* dom(B).

(a) *Se f é um homomorfismo então, para todo termo $t(\bar{x})$ de L e tupla $\bar{a}$ de A, $f(t^A[\bar{a}]) = t^B[f\bar{a}]$.*

(b) *f é um homomorfismo se e somente se, para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L e tupla $\bar{a}$ de A,*

(3.12) $$A \vDash \phi[\bar{a}] \;\Rightarrow\; B \vDash \phi[f\bar{a}].$$

(c) *f é uma imersão se e somente se, para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L e tupla $\bar{a}$ de A,*

(3.13) $$A \vDash \phi[\bar{a}] \;\Leftrightarrow\; B \vDash \phi[f\bar{a}].$$

Demonstração. (a) pode ser facilmente demonstrado por indução sobre a complexidade de t, usando (3.5)–(3.7).

(b) Suponha inicialmente que f é um homomorfismo. Como um exemplo típico, suponha que $\phi(\bar{x})$ é $R(s,t)$, onde $s(\bar{x})$ e $t(\bar{x})$ são termos. Assuma $A \vDash \phi[\bar{a}]$. Então por (3.11) nós temos

(3.14) $$(s^A[\bar{a}], t^A[\bar{a}]) \in R^A.$$

Então pela parte (a) e pelo fato de que f é um homomorfismo (ver (2.2) acima),

(3.15) $$(s^B[f\bar{a}], t^B[f\bar{a}]) = (f(s^A[\bar{a}]), f(t^A[\bar{a}])) \in R^B.$$

Logo $B \vDash \phi[f\bar{a}]$ por (3.11) novamente. Essencialmente a mesma demonstração funciona para toda fórmula atômica ϕ.

Para a direção contrária, novamente tomamos um exemplo típico. Assuma que (3.12) se verifica para toda sentença atômica ϕ e seqüências $\bar{a}$. Suponha que $(a_0, a_1) \in R^A$. Então escrevendo $\bar{a}$ no lugar de (a_0, a_1), nós temos $A \vDash R(x_0, x_1)[\bar{a}]$. Então (3.12) implica que $B \vDash R(x_0, x_1)[f\bar{a}]$, que devido a (3.11) implica que $(fa_0, fa_1) \in R^B$ como requerido. Por conseguinte f é um homomorfismo.

(c) é demonstrado como (b), mas usando (2.4) no lugar de (2.2). □

Uma variante do Teorema 1.3.1(c) é frequentemente útil. Por uma **fórmula atômica negada** de L queremos dizer uma cadeia $\neg\phi$ onde ϕ é uma fórmula atômica de L. Lemos o símbolo $\neg$ como 'não' e definimos

(3.16) $$\text{'}A \vDash \neg\phi[\bar{a}]\text{' se verifica} \quad \text{sse} \quad \text{'}A \vDash \phi[\bar{a}]\text{' não se verifica.}$$

onde A é uma L-estrutura qualquer, ϕ é uma fórmula atômica e $\bar{a}$ é uma seqüência de A. Um **literal** é uma fórmula atômica ou uma fórmula atômica negada; ele é um **literal fechado** se não contém variáveis.

Corolário 1.3.2. *Sejam A e B L-estruturas e f uma função de* dom(A) *para* dom(B). *Então f é uma imersão se e somente se, para todo literal $\phi(\bar{x})$ de L, e seqüência $\bar{a}$ de A,*

(3.17) $$A \vDash \phi[\bar{a}] \;\Rightarrow B \vDash \phi[f\bar{a}].$$

Demonstração. Imediata de (c) do teorema e (3.16). □

A álgebra de termos

O oráculo délfico dizia 'Conhece-te a ti mesmo'. Termos podem fazer isso – eles podem descrever a si próprios. Seja L uma signatura qualquer e X um conjunto de variáveis. Definimos a **álgebra de termos de L com base X** como sendo a seguinte L-estrutura A. O domínio de A é o conjunto de todos os termos de L cujas variáveis estão em X. Colocamos

(3.18) $c^A = c$ para cada constante c de L,

(3.19) $F^A(\bar{t}) = F(\bar{t})$ para cada símbolo n-ário de função F de L e n-tupla $\bar{t}$ de elementos de $\mathrm{dom}(A)$,

(3.20) R^A é vazio para cada símbolo de relação R de L.

A álgebra de termos de L com base X é também conhecida como a **L-estrutura absolutamente livre com base X**.

Exercícios para a seção 1.3

1. Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Mostre que $\langle Y\rangle_B$ consiste daqueles elementos de B que têm a forma $t^B[\bar{b}]$ para algum termo $t(\bar{x})$ de L e alguma tupla $\bar{b}$ de elementos de Y. [Use a construção de $\langle Y\rangle_B$ definida na demonstração do Teorema 1.2.3.]

2. (a) Se $t(x,y,z)$ é $F(G(x,z),x)$, que são $t(z,y,x)$, $t(x,z,z)$, $t(F(x,x),G(x,x),x)$, $t(t(a,b,c),b,c)$?
(b) Seja A a estrutura $\langle\mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle$ onde $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais $0,1,\ldots$. Seja $\phi(x,y,z,u)$ a fórmula atômica $x+z=y\cdot u$ e seja $t(x,y)$ o termo $y\cdot y$. Quais das seguintes relações se verificam? $A\vDash\phi(0,1,2,3)$; $A\vDash\phi[1,5,t^A[4,2],1]$; $A\vDash\phi[9,1,16,25]$; $A\vDash\phi[56,t^A[9,t^A[0,3]],t^A[5,7],1]$. [Respostas: $F(G(z,x),z)$, $F(G(x,z),x)$, $F(G(F(x,x),x),F(x,x))$, $F(G(F(G(a,c),a),c),F(G(a,c),a))$; não, sim, sim, não.]

3. Seja A uma L-estrutura, $\bar{a}=(a_0,a_1,\ldots)$ uma seqüência de elementos de A e $\bar{s}=(s_0,s_1,\ldots)$ uma seqüência de termos fechados de L tal que, para cada i, $s_i^A=a_i$. Mostre que (a) para cada termo $t(\bar{x})$ de L, $t(\bar{s})^A=t^A[\bar{a}]$, (b) para cada fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L, $A\vDash\phi(\bar{s})\ \Leftrightarrow\ A\vDash\phi[\bar{a}]$.

4. Sejam A e B L-estruturas, $\bar{a}$ uma seqüência de elementos que geram A e f uma função de $\mathrm{dom}(A)$ para $\mathrm{dom}(B)$. Mostre que f é um homomorfismo se e somente se para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L, $A\vDash\phi[\bar{a}]$ implica $B\vDash\phi[f\bar{a}]$.

5. (Lema da leitura única). Seja L uma signatura e t um termo de L. Mostre que t pode ser construído de uma única forma. [Em outras palavras, (a) se t é uma constante então t também não é da forma $F(\bar{s})$, (b) se t é $F(s_0,\ldots,s_{m-1})$ e $G(r_0,\ldots,r_{n-1})$ então $F=G$, $m=n$ e para cada $i<n$, $s_i=r_i$. Para cada ocorrência σ de um símbolo em t, defina $^{\#}(\sigma)$ como sendo o número de ocorrências de '(' à esquerda de σ, menos o número de ocorrências de ')' à esquerda de σ; use $^{\#}(\sigma)$ para identificar as vírgulas relacionadas com F em t.]

6. Seja A a álgebra de termos de L com base X. Mostre que para cada termo $t(\bar{x})$ de L e cada tupla $\bar{s}$ de elementos de $\mathrm{dom}(A)$, $t^A[\bar{s}]=t(\bar{s})$.

7. Sejam A a álgebra de termos de signatura L com base X, e B uma L-estrutura qualquer. Mostre que para cada função $f : X \to \mathrm{dom}(B)$ existe um único homomorfismo $g : A \to B$ que concorda com f em X. Mostre também que se $t(\bar{x})$ é um termo qualquer em $\mathrm{dom}(A)$ então $t^B[f\bar{x}] = g(t)$.

1.4 Parâmetros e diagramas

As convenções para interpretar variáveis são algumas das mais partes mais aborrecidas da teoria dos modelos. Podemos evitá-las, a um certo preço. Ao invés de interpretar uma variável como um nome de um elemento b, podemos adicionar uma nova constante para b à signatura. O preço que pagamos é que a linguagem muda toda vez que um outro elemento é nomeado. Quando constantes são adicionadas à signatura, as novas constantes e os elementos que elas nomeiam são chamados de **parâmetros**.

Suponha por exemplo que A é uma L-estrutura, $\bar{a}$ é uma seqüência de elementos de A, e desejamos nomear os elementos em $\bar{a}$. Então escolhemos uma seqüência $\bar{c}$ de novos símbolos de constante distintos, do mesmo comprimento que $\bar{a}$, e formamos a signatura $L(\bar{c})$ pela adição das constantes $\bar{c}$ a L. Na notação de (2.5), $(A, \bar{a})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura, e cada elemento a_i é $c_i^{(A,\bar{a})}$.

Igualmente se B é uma outra L-estrutura e $\bar{b}$ é uma seqüência de elementos de B de mesmo comprimento que $\bar{c}$, então existe uma $L(\bar{c})$-estrutura $(B, \bar{b})$ na qual estas mesmas constantes c_i nomeiam os elementos de $\bar{b}$. O próximo lema é sobre esta situação. Vem direto das definições, é frequentemente utilizado de forma silenciosa.

Lema 1.4.1. *Sejam A, B L-estruturas e suponha que $(A, \bar{a})$, $(B, \bar{b})$ são $L(\bar{c})$-estruturas. Então um homomorfismo $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$ é a mesma coisa que um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$. Igualmente uma imersão $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$ é a mesma coisa que uma imersão $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.* □

Na situação acima, se $t(\bar{x})$ é um termo de L então $t^A[\bar{a}]$ e $t(\bar{c})^{(A,\bar{a})}$ são o mesmo elemento; e se $\phi(\bar{x})$ é uma fórmula atômica então $A \vDash \phi[\bar{a}] \Leftrightarrow (A, \bar{a}) \vDash \phi(\bar{c})$. Estas duas notações – o colchete e a notação de parâmetro – servem o mesmo propósito, e é um peso sobre a paciência de qualquer um manter as duas separadas. O seguinte meio-termo funciona bem na prática. Usamos elementos a_i como *constantes nomeando a si próprias*. A signatura expandida é então $L(\bar{a})$, e escrevemos $t^A(\bar{a})$ e $A \vDash \phi(\bar{a})$ com a consciência leve. Deve-se tomar cuidado quando $\bar{a}$ contém repetições, ou quando duas $L(\bar{c})$-estruturas separadas estão sob discussão. Por segurança retenho a notação com os colchetes durante as próximas seções.

Seja $\bar{a}$ a seqüência de elementos de A. Dizemos que $\bar{a}$ **gera** A, em símbolos $A = \langle \bar{a} \rangle_A$, se A é gerada pelo conjunto de todos os elementos em $\bar{a}$. Suponha que A é uma L-estrutura, $(A, \bar{a})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura e $\bar{a}$ gera A. Então (cf. Exercício 1 adiante) todo elemento de A é da forma $t^{(A,\bar{a})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$; logo todo elemento de A tem um nome em $L(\bar{c})$. O conjunto de todos os literais fechados de $L(\bar{c})$ que são verdadeiros em $(A, \bar{a})$ é chamado de **diagrama** (de Robinson) de A, em símbolos $\mathrm{diag}(A)$. O conjunto de todas as sentenças atômicas de $L(\bar{c})$ que são verdadeiras em $(A, \bar{a})$ é chamado de **diagrama positivo** de A, em símbolos $\mathrm{diag}^+(A)$.

Note que $\mathrm{diag}(A)$ e $\mathrm{diag}^+(A)$ não são unicamente determinados, porque em geral existem muitas maneiras de escolher $\bar{a}$ e $\bar{c}$ tal que $\bar{a}$ gera A. Mas isso nunca tem grande importância. Existe sempre ao menos uma escolha possível de $\bar{a}$ e $\bar{c}$: simplesmente liste todos os elementos de A sem repetição.

Diagramas e diagramas positivos devem ser pensados como uma generalização das tabelas de multiplicação de grupos. Se conhecemos $\mathrm{diag}(A)$ ou $\mathrm{diag}^+(A)$, conhecemos A a menos de isomorfismo. O nome 'diagrama' é devido a Abraham Robinson, que foi o primeiro praticante da teoria dos modelos a usar diagramas sistematicamente. É um nome um pouco infeliz, porque nos convida a fazer uma confusão com diagramas no sentido de figuras com flechas, como em teoria das categorias. Na verdade o próximo resultado, que deveremos usar várias vezes, é sobre diagramas em ambos os sentidos.

Lema 1.4.2 ***(Lema do diagrama).*** *Sejam A e B L-estruturas, $\bar{c}$ uma seqüência de constantes, e $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ $L(\bar{c})$-estruturas. Então* (a) *e* (b) *são equivalentes.*
(a) *Para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{c})$, se $(A, \bar{a}) \models \phi$ então $(B, \bar{b}) \models \phi$.*
(b) *Existe um homomorfismo $f : \langle\bar{a}\rangle_A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.*
O homomorfismo f em (b) *é único se ele existe; é uma imersão se e somente se*
(c) *para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{c})$, $(A, \bar{a}) \models \phi \;\Leftrightarrow\; (B, \bar{b}) \models \phi$.*

Demonstração. Assuma (a). Dado que a função inclusão imerge $\langle\bar{a}\rangle_A$ em A, o teorema 1.3.1(c) diz que em (a) podemos substituir A por $\langle\bar{a}\rangle_A$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $A = \langle\bar{a}\rangle_A$. Pelo Lema 1.4.1, para demonstrar (b) basta encontrar um homomorfismo $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$. Definimos f como se segue. Como $\bar{a}$ gera A, cada elemento de A é da forma $t^{(A,\bar{a})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$. Ponha

$$f(t^{(A,\bar{a})}) = t^{(B,\bar{b})}. \tag{4.1}$$

A definição é segura, já que $s^{(A,\bar{a})} = t^{(A,\bar{a})}$ implica que $(A, \bar{a}) \models s = t$, logo $(B, \bar{b}) \models s = t$ por (a) e por isso $s^{(B,\bar{b})} = t^{(B,\bar{b})}$. Então f é um homomorfismo por (a) e pelo Teorema 1.3.1(b), o que demonstra (b). Já que qualquer homomorfismo f de $(A, \bar{a})$ para $(B, \bar{b})$ deve satisfazer (4.1), f é único em (b). A direção contrária (b)$\Rightarrow$(a) segue imediatamente do Teorema 1.3.1(b).

O argumento para imersões e (c) é semelhante, usando Teorema 1.3.1(c). □

O Lema 1.4.2 não menciona diagramas de Robinson diretamente, por isso deixe-me tornar a conexão explícita. Suponha que $\bar{a}$ gera A. Então a implicação (a)$\Rightarrow$(b) no lema diz que A pode ser mapeado homomorficamente para um reduto de B sempre que $B \models \mathrm{diag}^+(A)$. Da mesma forma a última parte do lema diz que se $B \models \mathrm{diag}(A)$ então A pode ser imerso em um reduto de B.

Exercícios para a seção 1.4

1. Seja B uma L-estrutura. Se $\bar{b}$ é uma seqüência de elementos de B e $\bar{c}$ são parâmetros tais que $(B, \bar{b})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura, demonstre que $\langle\bar{b}\rangle_B$ consiste daqueles elementos de B que têm a forma $t^{(B,\bar{b})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$.

2. Sejam A, B L-estruturas e $\bar{a}$ uma seqüência de elementos de A. Seja g uma função dos elementos de $\bar{a}$ para $\mathrm{dom}(B)$ tal que para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{a})$, $(A,\bar{a}) \models \phi$ implica $(B, g\bar{a}) \models \phi$. Mostre que g tem uma única extensão para um homomorfismo $g' : \langle\bar{a}\rangle_A \to B$. (Na prática toma-se frequentemente g e g' como idênticos.)

3. Sejam $(A,\bar{a})$ e $(B,\bar{b})$ $L(\bar{c})$-estruturas que satisfazem exatamente às mesmas sentenças atômicas de $L(\bar{c})$. Suponha também que as L-estruturas A e B são geradas por $\bar{a}$, $\bar{b}$ respectivamente. Mostre que existe um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.

1.5 Modelos canônicos

Na seção anterior vimos como se pode traduzir qualquer estrutura em um conjunto de sentenças atômicas. Acontece que existe um bom caminho de volta: podemos converter qualquer conjunto de sentenças atômicas em uma estrutura.

Seja L uma signatura, A uma L-estrutura e T o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A. Então T tem as duas seguintes propriedades:

(5.1) Para todo termo fechado t de L, a sentença atômica $t = t$ pertence a T.

(5.2) Se $\phi(x)$ é uma fórmula atômica de L e a equação $s = t$ pertence a T, então $\phi(s) \in T$ se e somente se $\phi(t) \in T$.

Qualquer conjunto T de sentenças atômicas que satisfaça (5.1) e (5.2) será chamado de =-**fechado** (em L).

Lema 1.5.1. *Seja T um conjunto =-fechado de sentenças atômicas de L. Então existe uma L-estrutura A tal que*
(a) *T é o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A,*
(b) *todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L.*

Demonstração. Seja X o conjunto de todas os termos fechados de L. Definimos a relação $\sim$ sobre X da seguinte forma

(5.3) $$s \sim t \quad \text{sse} \quad s = t \in T.$$

Reivindicamos que $\sim$ é uma relação de equivalência. (i) Por (5.1), $\sim$ é reflexiva. (ii) Suponha que $s \sim t$; então $s = t \in T$. Mas se $\phi(x)$ é a fórmula $x = s$, então $\phi(s)$ é $s = s$ que pertence a T por (5.1); logo por (5.2), T também contém $\phi(t)$, que é $t = s$. Por conseguinte $t \sim s$. (iii) Suponha que $s \sim t$ e $t \sim r$. Então seja $\phi(x)$ a fórmula $s = x$. Por hipótese ambas $\phi(t)$ e $t = r$ estão em T, logo por (5.2) T também contém $\phi(r)$, que é $s = r$. Por conseguinte $s \sim r$. Isto prova a reivindicação.

Para cada termo fechado t seja $t^\sim$ a classe de equivalência de t sob $\sim$, e seja Y o conjunto de todas as classes de equivalência $t^\sim$ com $t \in X$. Definiremos uma L-estrutura A com $\mathrm{dom}(A) = Y$.

Primeiramente, para cada constante c de L colocamos $c^A = c^\sim$. Depois, se $0 < n < \omega$ e F é um símbolo n-ário de função de L, definimos F^A por

(5.4) $$F^A({s_0}^\sim, \ldots, {s_{n-1}}^\sim) = (F(s_0, \ldots, s_{n-1}))^\sim.$$

É preciso verificar se (5.4) é uma definição segura. Suponha que $s_i \sim t_i$ para cada $i < n$. Então através de n aplicações de (5.2) à sentença $F(s_0, \ldots, s_{n-1}) = F(s_0, \ldots, s_{n-1})$, que pertence a T por (5.1), chegamos à conclusão que a equação $F(s_0, \ldots, s_{n-1}) = F(t_0, \ldots, t_{n-1})$ pertence a T. Por conseguinte $F(s_0, \ldots, s_{n-1})^{\sim} = F(t_0, \ldots, t_{n-1})^{\sim}$. Isto demonstra que a definição (5.4) é segura.

Finalmente definimos a relação R^A, onde R é um símbolo n-ário de relação qualquer de L, por

$$(5.5) \qquad ({s_0}^{\sim}, \ldots, {s_{n-1}}^{\sim}) \in R^A \qquad \text{sse} \qquad R(s_0, \ldots, s_{n-1}) \in T.$$

(5.5) é justificada da mesma maneira que (5.4), e ela completa a descrição da L-estrutura A.

Agora é fácil provar por indução sobre a complexidade de t, usando (3.6) e (3.7) da seção 1.3, que para todo termo fechado t de L,

$$(5.6) \qquad t^A = t^{\sim}.$$

Logo inferimos que se s e t são termos fechados quaisquer de L então

$$(5.7) \qquad A \vDash s = t \quad \Leftrightarrow \quad s^A = t^A \quad \Leftrightarrow \quad s^{\sim} = t^{\sim} \quad \Leftrightarrow \quad s = t \in T.$$

Juntamente com um argumento semelhante para sentenças atômicas da forma $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$, usando (3.11) da seção 1.3, isto demonstra que T é o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A. Também por (5.6) todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L. □

Agora se T é um conjunto qualquer de sentenças atômicas de L, existe pelo menos um conjunto U de sentenças atômicas de L que contém T e é =-fechado em L. Chamamos U de **=-fecho** de T em L. Qualquer L-estrutura que é um modelo de U tem que ser também um modelo de T já que $T \subseteq U$.

Teorema 1.5.2. *Para qualquer signatura L, se T é um conjunto de sentenças atômicas de L então existe uma L-estrutura A tal que*
(a) *$A \vDash T$,*
(b) *todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L,*
(c) *se B é uma L-estrutura e $B \vDash T$ então existe um único homomorfismo $f : A \to B$.*

Demonstração. Aplique o lema ao =-fecho U de T para obter a L-estrutura A. Então (a) e (b) são óbvios. Agora $A = \langle \varnothing \rangle_A$ por (b). Logo (c) seguirá do lema do diagrama (Lema 1.4.2) se pudermos mostrar que toda sentença atômica que é verdadeira em A é verdeira em todos os modelos B de T. Pela escolha de A, toda sentença verdadeira em A pertence a U. O conjunto de todas as sentenças atômicas que são verdadeiras em um modelo B de T é um conjunto =-fechado contendo T, logo ele deve conter o =-fecho de T, que é U. □

Pela cláusula (c), o modelo A de T no Teorema 1.5.2 é único a menos de isomorfismo. (Veja Exercício 1.2.2) Chamamos esse modelo de **modelo canônico** de T. Note que ele será a L-estrutura vazia se e somente se L não tem símbolos de constante.

Algumas vezes – por exemplo em programação em lógica – não se inclui equações como fórmulas atômicas. Nessa situação o modelo canônico é ainda mais fácil de construir, porque não existe a necessidade de fatorar uma relação de equivalência. Por isso obtemos o que ficou conhecido como o **universo de Herbrand** de um conjunto de sentenças atômicas.

Aqui vai um exemplo no extremo oposto, onde todas as sentenças atômicas são equações.

Exemplo 1: ***Adicionando raízes de polinômios a um corpo.*** Seja F um corpo e $p(X)$ um polinômio irredutível sobre F no indeterminado X. Podemos considerar $F[X]$ como uma estrutura na signatura de anéis com constantes adicionadas para X e todos os elementos de F. Seja T o conjunto de todas as equações que são verdadeiras em $F[X]$. (Por exemplo se a é $b \cdot (c+d)$ em $F[X]$, então T contém a equação '$a = b \cdot (c+d)$'. Além disso anéis satisfazem a lei $1 \cdot x = x$, logo T contém a equação $1 \cdot t = t$ para todo termo fechado t.) Então T é um conjunto de sentenças atômicas, e a equação '$p(X) = 0$' é uma outra sentença atômica. Seja C o modelo canônico do conjunto $T \cup \{p(X) = 0\}$. Então C é uma imagem homomórfica de $F[X]$, porque ele é um modelo de T e todo elemento é nomeado por um termo fechado. Em particular C é um anel; além do mais '$p(X) = 0$' se verifica em C, e por isso todo elemento do ideal I em $F[X]$ gerado por $p(X)$ vai a 0 em C. Seja θ uma raiz qualquer de p; então a extensão de corpo $F[\theta]$ é um modelo de $T \cup \{p(X) = 0\}$ também, com X lido como sendo um nome para θ. Pelo Teorema 1.5.2(c), $F[\theta]$ é uma imagem homomórfica de C. Como $F[\theta] = F[X]/I$, segue-se que C é isomorfa a $F[\theta]$.

Exercícios para a seção 1.5

1. Mostre que a propriedade de ser =-fechado não é alterada se modificarmos 'se e somente se' em (5.2) por 'se ... então'.

2. Seja T um conjunto de literais fechados de uma signatura L. Mostre que (a) é equivalente a (b).
(a) Alguma L-estrutura é um modelo de T.
(b) Se $\neg\phi$ é uma sentença atômica negada em T, então ϕ não pertence ao =-fecho do conjunto de sentenças atômicas em T.

3. Seja T um conjunto finito de literais fechados de uma signatura L. Mostre que o item (a) do Exercício 2 é equivalente a (c) Alguma L-estrutura finita é um modelo de T.
[Suponha que $A \models T$. Seja X o conjunto de todos os termos fechados que ocorrem como partes das sentenças em T, incluindo aqueles que ocorrem dentro de outros termos. Escolha um $a_0 \in \mathrm{dom}(A)$. Defina uma estrutura A' com domínio $\{t^A : t \in X\} \cup \{a_0\}$ tal que $A' \models T$.]

Leitura adicional

Leitores que sentirem necessidade de uma base mais sólida em lógica elementar se darão conta de que existem diversos textos excelentes disponíveis. Para nomear dois:

Cori, R. e Lascar, D., *Logique Mathématique, cours et exercices*. Paris Masson 1994 (dois volumes).

Ebbinghaus, H. D., Flum, J. & Thomas, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.

Dois artigos interessantes sobre a base histórica e filosófica de teoria dos modelos são os seguintes:

Demopoulos, W. Frege, Hilbert, and the conceptual structure of model theory. *History and Philosophy of Logic*, **15** (1994), 211–225.

Hintikka, J. On the development of the model-theoretical tradition in logical theory. *Synthese*, **77** (1988), 1–16.

Capítulo 2

Classificando estruturas

> I must get into this stone world now.
> Ratchel, striae, relationships of tesserae,
> Inumerable shades of grey ...
> I try them with the old Norn words – hraun
> Duss, rønis, queedaruns, kollyarum ...
>
> *Hugh MacDiarmid, On a raised beach*

Agora que temos estruturas bem à nossa frente, a necessidade maior é começar a classificá-las e classificar suas características. Classificar é uma espécie de definir. A maior parte das classificações matemáticas é feita por axiomas ou pela definição de equações – em breve, por fórmulas. Este capítulo poderia ter sido intitulado 'A teoria elementar da classificação matemática por fórmulas'.

Observe três maneiras das quais os matemáticos usam fórmulas. Primeiro, um matemático escreve a equação '$y = 4x^2$'. Ao escrever esta equação nomeia-se um conjunto de pontos no plano, i.e. um conjunto de pares ordenados de números reais. Como diria um praticante da teoria dos modelos, a equação *define uma relação* 2*-ária sobre os reais*. Estudamos este tipo de definição na seção 2.1.

Ou, em segundo lugar, um matemático escreve as leis

(*) Para todo x, y e z, $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implica $x \leqslant z$;
para todo x e y, exatamente um destes se verifica: $x \leqslant y$, ou $y \leqslant x$, ou $x = y$.

Ao fazer isto *nomeia-se uma classe de relações*, a saber aquelas relações $\leqslant$ para as quais (*) é verdadeira. A seção 2.2 lista mais alguns exemplos deste tipo de nomeação. Tais exemplos cobrem a maioria dos ramos de álgebra.

Terceiro, um matemático define um **homomorfismo** de um grupo G para um grupo H como sendo uma função de G para H tal que $x = y \cdot z$ implica $f(x) = f(y) \cdot f(z)$. Aqui a equação $x = y \cdot z$ *define uma classe de funções*. Veja seção 2.5 para mais exemplos.

Muitos dos fundadores da teoria dos modelos quiseram entender como a linguagem funciona em matemática, e como ela deveria fazê-lo. (Pode-se mencionar Frege, Padoa, Russell, Gödel e Tarski entre outros.) Mas um ramo bem