Universidade Federal de Pernambuco
CIn / CCEN - Área II
Prova Final de Cálculo Numérico 2017.1 (11 / 07 / 2017)

Aluno(a): ____ **CPF:** ______________________

Professor: ___________________________________ **Turma:** _______________________________

Instruções:

- A avaliação é individual e sem consulta ao caderno e aos colegas!
- É permitido o uso de calculadora simples/cientíca. O uso de calculadoras gráficas não está autorizado.
- A interpretação das questões faz parte da avaliação

1- (2,0 pontos) Para a máquina F(10,2,-4,4) faça:

a) Calcule o volume do cilindro cuja base tem raio $r = 8{,}65$ e altura $h = 0{,}0705$. Lembre que o volume de um cilindro é dado por $V = h(\pi(r^2))$ (1,0pt).

b) Defina a região dos números reais na qual essa máquina pode operar (0,5pt).

c) Dê um exemplo de operação que resulte em underflow. (0,5pt).

2- (2,0 pontos) Dado um tabelamento com $n + 1$pontos ordenados $\{x_i, f(x_i)\}$, com $i = 0, \ldots, n$. Assinale verdadeiro ou falso para cada afirmativa abaixo, justificando sua resposta.

a) A função de ajustamento $P(x)$ resultado do método dos mínimos quadrados (MMQ), que irá aproximar $f(x)$, será sempre da forma $P(x) = ax + b$, onde a e b serão determinados pelo MMQ. (0,5pt)

b) A função de ajustamento $P(x)$ resultado do método dos mínimos quadrados (MMQ), poderá aproximar $f(x)$ em regiões fora do intervalo $[x_0, x_n]$. (0,5pt)

c) Para verificar se o polinômio $P(x)$, encontrado pelo método de Lagrange, é o polinômio interpolador deste tabelamento, basta que seu grau seja menor ou igual a n. (0,5pt)

d) Se o tabelamento criado vier de um polinômio $Q(x)$, então o polinômio interpolador $P(x)$ será tal que $Q(x) = P(x)$. (0,5pt)

3- (4,0 pontos) Deseja-se calcular a área sob curva $f(x) = e^{-x^2} - \frac{x^2}{4}$ nos limites 0 e x^*, onde x^* é a raiz real positiva de $f(x)$. (**Use 4 casas decimais nos cálculos**):

a) Faça um esboço do gráfico de $f(x)$ em torno da raiz e defina um intervalo de separação de amplidtude 0,1 que contenha a raiz.. (0,75pt)
b) Verifique que este intervalo contenha apenas uma raiz. (0,25pt)

c) Encontre, usando o método de Newton, uma aproximação para x^*, parando o processo iterativo após 3 iterações ou se $|x_{i+1} - x_i| < 0{,}001$. (1,5pt)

d) Calcule a área com o método de Simpson para um tabelamento com NO MÍNIMO 4 pontos. (1,5pt)

4- (2 pontos) Dado o sistema linear abaixo, caso o sistema seja diagonal estritamente dominante por linha, inicie um processo iterativo partindo do vetor (1,1,1) e pare após 5 iterações, usando o método iterativo de Jacobi. Caso contrário resolva-o pelo Método de Eliminação de Gauss. Considere 4 casas decimais nos seus cálculos.

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 7 \\ 2x - y + z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Formulário:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_k(x_i) g_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g_j(x_i), \; j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\mathcal{L}_i^{(n)}(x) \quad \text{onde} \quad \mathcal{L}_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$f_0(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$f_r(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}) = \frac{f_{r-1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+r}) - f_{r-1}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r-1})}{x_{i+r} - x_i}$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots, n.$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, (n - r).$$

$$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$\Delta^r f(x_i) = \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, (n - r).$$

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h^1} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2} + \cdots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}.$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong h\,[\,E/2 + I + P\,]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong h/3\,[\,E + 4I + 2P\,]$$

$$|T_t| \leq \frac{n\,h^3}{12} M_2 \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f''(m)|$$

$$|T_s| \leq \frac{n\,h^5}{180} M_4 \quad \text{onde} \quad M_4 = \max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f^{(iv)}(m)|$$