Universidade Federal de Pernambuco
CIn / CCEN - Área II
1º Exercício de Cálculo Numérico (18 / 06 / 2014)

Aluno(a)____

1- **Questão 1** (2,5 pontos) Considere uma imagem digital como uma matriz bidimensional de dimensões $M \times N$. Em algumas aplicações que requerem grande precisão, como em aplicações envolvendo imagens médicas ou industriais, é necessário medir de forma quantitativa a qualidade de uma imagem transformada por um processo qualquer que possa adicionar ruído, como durante a transmissão ou compressão da mesma. Assim, compara-se a imagem original com a imagem resultante após essa transformação.
Uma métrica comumente aplicada para medir a qualidade de uma imagem transformada g em relação à sua imagem original f é o erro médio quadrático, definido como
$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (f(x,y) - g(x,y))^2$. Dessa forma, quanto menor o MSE, mais a imagem transformada se assemelha da imagem original.
Dadas as duas imagens f (original) e g (transformada) representadas por matrizes 4x4 como se segue e a máquina $F = (10,4,-9,9)$:

f=

0.5	0.345	0.2	0.123
0.12	0.75	0.9	0.45355
0.1	0.4	0.3	0.911
0.222	0.237	0.4563	0.12

g=

0.5	0.2548	0.2	0.123
0.356	0.75	0.125	0.45355
0.1	0.4	0.3	0.911
0.222	0.237	0.4562501	0.12

a) calcule o MSE entre f e g utilizando a máquina F (1,0 ponto)
b) Defina a região de valores de MSE que resultam em overflow na máquina F (0,5 ponto)
c) Defina a região de valores de MSE que resultam em underflow na máquina F (0,5 ponto)
d) Quantos valores de MSE possuem representação exata em F? (0,5 ponto)

Questão 2 (3,0 pontos) Seja $f(x)=x^3-e^x+2$

a) Localize graficamente a raiz negativa da função f(x) mais próxima da origem. (1,0 ponto)
b) Determine, analiticamente, um intervalo de separação de amplitude 1 referente à raiz localizada no item anterior. (Prove que este é um intervalo de separação) (1,0 ponto)
c) Use o método de Newton para encontrar a raiz de f(x) utilizando como aproximação inicial o ponto médio do intervalo definido no item b. Execute o método até que $|f(x)|<1{,}5\times 10^{-2}$ **e** $|x_{k+1}-x_k|<1{,}5\times 10^{-2}$. Execute, no máximo, 4 iterações. Trabalhe com 4 decimais e arredondamento padrão. (1,0 ponto)

Questão 3 (2,0 pontos) Seja o seguinte tabelamento:

x_i	1	1,5	2,5	3,5
$f(x_i)$	10	4,25	-1,25	3,25

Determine o polinômio de grau 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$ que melhor se ajusta a este tabelamento **mas que admite x = 2 e x = 3 como suas raízes.** Use o **arredondamento padrão** e **quatro casas decimais de precisão**.

Questão 4 (2,0 pontos) Determine, aproximadamente, o vetor solução do sistema de equação linear a seguir, com "tolerância" de 10^{-2}, isto é, faça iterações até que:

$$\text{Máx}_{1\leq i\leq n} |x_i(k+1) - x_i(k)| \leq 10^{-2}.$$

Caso isso não ocorra até a terceira iteração, pare. Use 3 casas decimais e arredondamento padrão. Parta do vetor nulo e use o método iterativo de Gauss-Seidel, depois de obter uma condição suficiente de convergência para o método.

$$7x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i) g_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i) f(x_i) \quad j=0,1,\ldots,m$$

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii}) \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] i=1,\ldots,n$$

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii}) \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] i=1,\ldots,n$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gabarito

Questão 1

a) Note que a subtração de dois números representáveis por uma máquina de ponto flutuante iguais será 0 e não contribuirá em nada para o MSE, então só precisamos calcular considerando os valores diferentes, que são os que não estão riscados abaixo:

f=

~~0.5~~	0.345	~~0.2~~	~~0.123~~
0.12	~~0.75~~	0.9	~~0.45355~~
~~0.1~~	~~0.4~~	~~0.3~~	~~0.911~~
~~0.222~~	~~0.237~~	0.4563	~~0.12~~

g=

~~0.5~~	0.2548	~~0.2~~	~~0.123~~
0.356	~~0.75~~	0.125	~~0.45355~~
~~0.1~~	~~0.4~~	~~0.3~~	~~0.911~~
~~0.222~~	~~0.237~~	0.4562501	~~0.12~~

Representando cada um deles para a máquina $F=(10,4,-9,9)$:

f=

~~0.5~~	3.450 10^-1	~~0.2~~	~~0.123~~
1.200 10^-1	~~0.75~~	9.000 10^-1	~~0.45355~~
~~0.1~~	~~0.4~~	~~0.3~~	~~0.911~~
~~0.222~~	~~0.237~~	4.563 10^-1	~~0.12~~

g=

~~0.5~~	2.548 10^-1	~~0.2~~	~~0.123~~
3.560 10^-1	~~0.75~~	1.250 10^-1	~~0.45355~~
~~0.1~~	~~0.4~~	~~0.3~~	~~0.911~~
~~0.222~~	~~0.237~~	4.563 10^-1	~~0.12~~

Fazendo as operações “de dentro dos somatórios”:

```
1.200 10^-1 - 3.560 10^-1 = -2.3600 10^-1, ao quadrado, 5.5696 10^-2 = 5.570 10^-2

3.450 10^-1 - 2.548 10^-1 = 0.902 10^-1 = 9.020 10^-2, ao quadrado, 81.3604 10^-4 = 8.13604 10^-3 = 8.136 10^-3

9.000 10^-1 - 1.250 10^-1 = 7.750 10^-1, ao quadrado, 60.0625 10^-2 = 6.00625 10^-1 = 6.006 10^-1

4.563 10^-1 - 4.563 10^-1 = 0
```

Agora somando:

```
5.570 10^-2 + 8.136 10^-3 + 6.006 10^-3
(5.570 + 0.8136) 10^-2  + 6.006 10^-1
6.384 10^-2 + 6.006 10^-1
(0.6384 + 6.006) 10^-1
= 6.6444 10^-1 = 6.644 10^-1
```

Falta o termo de normalização 1/MN...

```
4.000 10^0 x 4.000 10^0 = 16.000 10^0 = 1.600 10^1
1.000 10^0 / 1.600 10^1 = 0.625 10^-1 = 6.250 10^-2
```

Finalmente...

`6.250 10^-2 x 6.644 10^-1 = 41.525 10^-3 = 4.1525 10^-2 =` **`4.152 10^-2`**

b) Ocorre overflow na máquina F quando temos um x > 9.999 10^9 ou x < -9.999 10^9. Como o MSE é sempre positivo, temos que valores de MSE > 9.999 10^9 causam overflow. Também ocorerá overflow se MN > 9.999 10^9 ou se $\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(f(x,y)-g(x,y)\right)^2 > 9.999 \, x \, 10^9$.

c) xmin = 1.000 10^-9. Como MSE é sempre positivo ocorrerá underflow (partindo de tabelas de valores representáveis por F) se 0 < MSE < 1.000 10^-9. Também ocorrerá overflow se qualquer uma das condições abaixo ocorrer:

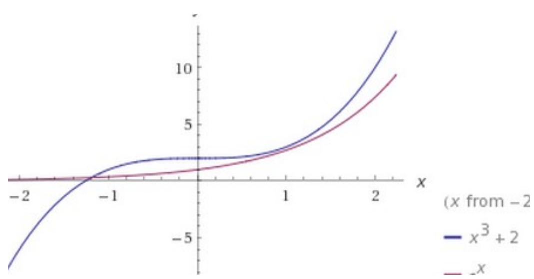
- 0 < $\left(f(x,y)-g(x,y)\right)$ < 1.000 10^-9 para algum par (x, y)
- -1.000 10^-9 < $\left(f(x,y)-g(x,y)\right)$ < 0 para algum par (x, y)
- 0 < $\left(f(x,y)-g(x,y)\right)^2$ < 1.000 10^-9 para algum par (x, y)

d) Basta calcular quantos valores não negativos são representáveis em F. Isto é:

`9 x 10^3 x 19 + 1 = 171001` valores para o MSE terão representação exata em F.

Questão 2

a) Fazendo-se $e^x = x^3 + 2$ localizamos graficamente a raiz desejada, entre -1 e -2.



b) (i) A função f(x) é contínua em toda a extensão dos reais, logo também é contínua em [-2, -1]. (ii) Sua derivada é f'(x) = $3x^2 - e^x$ que é sempre positiva no intervalo [-2, -1] (uma vez que $3x^2$ é maior do que e^x no intervalo), portanto f(x) é estritamente crescente nele. (iii) Além disso, temos que f(-2) é negativo enquanto que f(-1) é positivo. Dados (i), (ii) e (iii), [-2, -1] é um intervalo de separação.

c) x_0 = -1.5

Temos que $x_{k+1} = x_k - \dfrac{{x_k}^3 - e^{x_k} + 2}{3x_k^2 - e^x}$

Assim:

k	x_k	$\|f(x)\|$	$\|x_{k+1} - x_k\|$
0	-1,5	1,59813016	1,335749595
1	-1,255146004	0,262380565	0,248936534
2	-1,196066455	0,013444032	0,0134016
3	-1,192696469	4,24312E-05	4,24308E-05
4	-1,192685765	4,27315E-10	

Questão 3

Como o polinômio é de grau 2 e admite $x = 2$ e $x = 3$ como raízes temos que ele deve ser da forma $a_0(x - 2)(x - 3) = a_0(x^2 - 5x + 6)$.

Seja $g_0 = x^2 - 5x + 6$

i	xi	f(xi)	g0	G0^2	f(xi)g0(xi)
0	1	10	2	4	20
1	1,5	4,25	0,75	0,5625	3,1875
2	2,5	-1,25	-0,25	0,0625	0,3125
3	3,5	3,25	0,75	0,5625	2,4375
			SUM	5,1875	25,9375

a_0 x 5,1875 = 25,9375 -> $a_0 = 5$

Logo o polinômio é $5x^2 - 25x + 30$

Questão 4

No formato abaixo, não temos garantia de convergência:

$$7x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

No entanto, se trocarmos a posição das linhas podemos obter o sistema equivalente abaixo, que é de diagonal dominante por linha:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$7x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10$$

Calculando através de Gauss-Seidel na ordem x_1, x_2, x_3, teremos:

$x_1^{k+1} = (7 - 2x_2^{k} + x_3^{k})/5$

$x_2^{k+1} = (7x_1^{k+1} + 2x_3^{k})/10$

$x_3^{k+1} = (-10 + 3x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1})/6$

k	x_1	x_2	x_3	$\text{Máx}_{1 \leq i \leq n} \| x_i(k+1) - x_i(k)\|$
0	0	0	0	1,400
1	1,400	0,980	-0,640	0,520
2	0,880	0,488	-1,064	0,112
3	0,992	0,482	-1,010	