Universidade Federal de Pernambuco
– CIn / CCEN -
Exercíco Final de Cálculo Numérico - 2013.1 (26 / 09 / 2013)

Aluno:____ **Turma:** ________________________

1º) Seja uma máquina de ponto flutuante F(10, 3, -9, 9). Responda:

a) Quantos números têm **representação exata** nessa máquina? (0,5 ponto)

b) Quais as regiões de overflow e underflow? (0,5 ponto)

c) Qual a maior e a menor distância ("gap") entre dois números consecutivos? (0,5 ponto)

d) Dê um exemplo de adição de dois números em que ocorre *Underflow* e um exemplo de divisão de dois números em que ocorre *Overflow.* (1,0 ponto)

2º **)** Considere a função $f(x) = g(x) - h(x)$, onde $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 2x}$ e $\boldsymbol{h(x) = \text{sen}(x + 1)}$. Para todos os cálculos, considere quatro casas decimais e arredondamento padrão.

a) Esboce os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$. Utilize-os para localizar graficamente **a raiz de $f(x)$ mais próxima da origem**, se existir. (0,5 ponto)

b) Determine analiticamente, um intervalo de separação $I = [a, b]$, de amplitude 0,1 que contenha tal raiz. (1,0 ponto)

c) Usando o método de Newton-Raphson aplicado à função $f(x)$ com x_0 igual ao ponto médio de I (I obtido no item anterior), encontre os valores de x_i para i = 0, 1, 2, 3, 4, parando antes se $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-4}$ (1,0 ponto)

3º **)** Os dados a seguir representam, aproximadamente, o número de *smartphones* (em milhões) vendidos em um certo país.

Ano	2008	2009	2010	2012
$f(x_i)$	1	4	6	10

Visando atender à demanda, os fabricantes já desejam planejar a produção para o **ano de 2019**.

Supondo que a série histórica é dada por $\boldsymbol{y = ax + b\ln(x)}$, faça uma estimativa para a demanda do ano de 2019, usando o MMQ. Trabalhe com três casas decimais e o arredondamento padrão. **(Considere 2008 → 1, ...)** (2,0 pontos)

4º) Considerando o tabelamento abaixo:

x_i	-2	-1	2	4
$f(x_i)$	-30	-8	-2	12

a) Aproxime f pelo polinômio interpolador P(x) que passa por todos os pontos do tabelamento. (1,5 ponto)

b) Calcule numericamente a integral aproximada de f, **no intervalo [0, 3]**, usando para tal o método de Simpson para calcular com 5 pontos $\int_0^3 P(x)$. Considere três casas decimais e o arredondamento padrão. (1,0 ponto)

c) Seria correto considerar que a integral de f, **no intervalo [0, 10]**, é aproximadamente igual ao valor obtido usando o método de Simpson com 55 pontos no cálculo aproximado de $\int_0^{10} P(x)$? Justifique. (0,5 ponto)

Formulário:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad x_{i+1}=\frac{x_{i-1}f(x_i)-x_i f(x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

$$x_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii} \qquad x_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii} \qquad \begin{cases} l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}, & i\geq j \\ u_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}\right)/l_{ii}, & i<j \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{i=0}^{n}g_k(x_i)g_j(x_i)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)g_j(x_i), \quad j=0,\ldots,m$$

$$|E|\leq\frac{nh^3}{12}M_2, M_2=max_{x_0\leq m\leq x_n}\left|f''(m)\right| \qquad |E|\leq\frac{nh^5}{180}M_4, M_4=max_{x_0\leq m\leq x_n}\left|f^{(iv)}(m)\right|$$

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\left[\frac{E}{2}+I+P\right] \qquad \int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{h}{3}\left[E+4\mathrm{I}+2\mathrm{P}\right]$$

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

GABARITO SIMPLIFICADO

1º)

a) Dado F(10, 3, -9, 9), têm presentação exata em F: $2\times9\times10^2\times19+1=34201$ números.

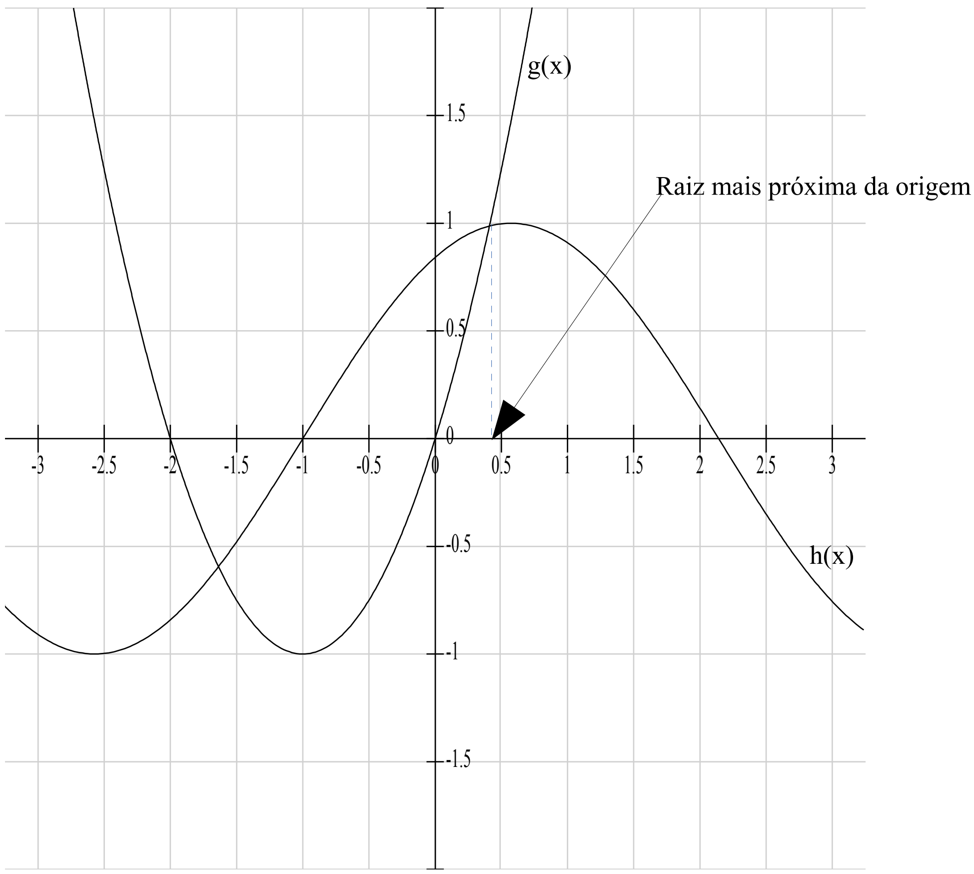
b) Temos que $x_{min}=1.00\times10^{-9}$ e $x_{max}=9.99\times10^{9}$. Logo a região de ***overflow*** é $]-\infty,-9.99\times10^9[\ \cup\ ]9.99\times10^9,\infty[$ e a região de ***underflow*** é $]-1.00\times10^{-9},1.00\times10^{-9}[\ \setminus\ \{0\}$

c) O maior gap ocorre entre números consecutivos no maior expoente, e é portanto $0.01\times10^9=10^7$. O menor gap ocorre entre números consecutivos no menor expoente, e é portanto $0.01\times10^{-9}=10^{-11}$.

d) Vários exemplos são possíveis.

2º)

a)



b) A função que procuramos o zero é $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - \text{sen}(x + 1)}$. Podemos começar analisando, a partir do gráfico, o intervalo [0.25, 0.5]. A derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ é $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 2 - \cos(x + 1)}$. Note que em todo intervalo temos que $\boldsymbol{f'(x)}$ é positiva, pois $\forall x\in[0.25, 0.5]: \cos(x+1)>0$, $2x+2>0$, $2x+2>\cos(x+1)$. Assim a função *f(x)* é estritamente crescente no intervalo [0.25, 0.5]. Verificamos facilmente que ela também é contínua nesse intervalo, uma vez que é contínua em todo $\mathbb{R}$. Temos que *f(x)* muda de sinal nos extremos do intervalo, uma vez que *f(0.25)* = -0.3865 e *f(0.5)* = 0.2525. Logo [0.25, 0.5] é um intervalo de separação de *f(x)*. Para reduzir esse intervalo, basta observar que qualquer subintervalo dele em que *f(x)* dos seus extremos mude de sinal também será um intervalo de separação. Analisemos então o ponto 0.4: *f*(0.4) = -0.0254. Logo [0.4, 0.5] é um intervalo de separação de *f(x)* com amplitude 0.1.

c) A função de iteração será: $x_{i+1} = x_i - \frac{x^2 + 2\mathrm{x} - \sin(x+1)}{2\mathrm{x} + 2 - \cos(x+1)}$

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	0.4500	-
1	0.4105	0.0395
2	0.4096	0.0009
3	0.4096	0.0000

Logo a solução será 0.4096

3º) Fazendo $a = a_0$; $x = g_0$; $b = a_1$; $\ln(x) = g_1$. Temos o sistema normal:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0^2(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i) g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) g_0(x_i) \\ a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i) g_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{3} g_1^2(x_i) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) g_1(x_i) \end{cases}$$

Construindo a tabela:

i	x_i	$f(x_i)$	$g_0(x_i)$	$g_0^2(x_i)$	$g_1(x_i)$	$g_1^2(x_i)$	$g_0 g_1$	fg_0	fg_1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
1	2	4	2	4	0.693	0.480	1.386	8	2.772
2	3	6	3	9	1.099	1.208	3.297	18	6.594
3	5	10	5	25	1.609	2.589	8.045	50	16.090
Σ				39		4.277	12.728	77	25.456

Sistema normal resultante:

$39a_0 + 12.728a_1 = 77$
$12.728a_0 + 4.277a_1 = 25.456$

Donde:

$a_0 = 1.109$; $a_1 = 2.651$

Logo $\boldsymbol{y = 1.109x + 2.651\ln(x)}$

Fazendo x = 12, temos a resposta procurada: **19.898 milhões**

4º) a) Considerando o tabelamento abaixo:

x_i	-2	-1	2	4
$f(x_i)$	-30	-8	-2	12

Usaremos o método de de Newton, para calcular o polinômio interpolador, uma vez os pontos do tabelamento não são equidistantes:

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	-2	-30	22	-5	1
1	-1	-8	2	1	-
2	2	-2	7	-	-
3	4	12	-	-	-

Donde:

$P(x) = -30 + (x + 2)22 + (x+2)(x+1)(-5) + (x+2)(x+1)(x-2)(1) \Rightarrow$
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

b) Com 5 pontos no intervalo [0, 3], teremos h = (3 – 0)/4 = 0.75

Donde o tabelamento de pontos

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	0.75	0.422
2	1.5	-1.125
3	2.25	-2.109
4	3	0

Fazendo: $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}[E+4\mathrm{I}+2\mathrm{P}]$, temos:

$$\int_0^3 f(x)\,dx \simeq \frac{0.75}{3}[(0+0)+4(0.422-2.109)+2(-1.125)]=-2.250$$

c) Não seria correto, pois $P(x)$ aproxima $f(x)$ apenas no intervalo de interpolação: [0, 3]. Como [0, 10] não está contido no intervalo de interpolação, não podemos assumir que $P(x)$ aproxima $f(x)$ neste intervalo. Assim não podemos usar a integral de $P(x)$ como aproximação da integral de $f(x)$ no intervalo [0, 10], qualquer que seja o método de integração.