1ª Prova de Cálculo Númerico - Área II - data: 25/06/2013

Questão 1 (6,0 pontos) - Seja a máquina $F(10, 4, -9, 9)$ e o arredondamento padrão, responda os itens abaixo, **justificando cada um deles**.

(a) (1,00pt) Defina a região do conjunto dos números reais representáveis pela máquina F.

(b) (2,00pt) Sejam $a = 32,165$, $b = 5,03728$, $c = 0,66755$ e $d = 0,083227$. Verifique se $a((b + c) + d) = (ab + ac) + ad$.

(c) (1,00pt) Dê dois exemplos de operações aritméticas com a máquina F, tal que: um resulte na região de *underflow* e o outro resulte na região de *overflow*.

(d) (1,00pt) Se x for um número real escrito como $x = \square, \square\square\square\square \times 10^6$ (em que cada $\square$ representa um dígito $0 - 9$, sendo o primeiro deles diferente de 0), qual é o maior erro possível devido ao arredondamento de x ?

(e) (1,00pt) A máquina $G(10, 6, -4, 4)$ possui menos elementos que a máquina F?

Questão 2 (4,0 pontos) - Seja $f(x) = e^x - x^3 + 3x$:

(a) (0,75pt) Localize graficamente, se existir, o zero da função $f(x)$ mais próximo da origem.

(b) (0,75pt) A seguir, analiticamente, determine um intervalo de separação de amplitude 0,1 contendo o zero da função f.

(c) (2,00pt) Use o método da Falsa Posição (Cordas) para calcular o zero da função f. A partir do intervalo de separação obtido no item anterior, faça 5 iterações ou pare antes se $\delta_k = |x_{k+1} - x_k| \leq 2 \times 10^{-4}$. Trabalhe com 4 decimais, e o arredondamento padrão.

(d) (0,50pt) Se o método da bisseção fosse utilizado, quantas iterações seriam necessárias para atingir uma precisão menor que o intervalo de separação encontrado na última iteração do item anterior ?

Equações: $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f_(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

Gabarito:

Q1.

a) $x \in C = [-x_{max}; -x_{min}] \cup \{0\} \cup [x_{min}; x_{max}]$, com $x_{min} = 1,000 \times 10^{-9}$ e $x_{max} = 9,999 \times 10^{9}$.

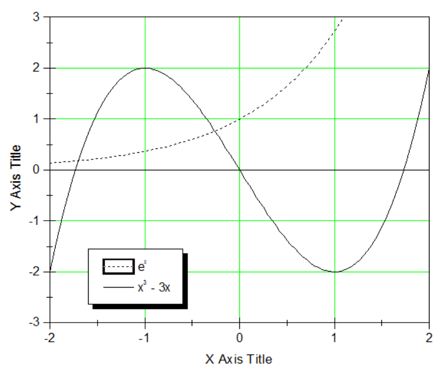
b) $a = 3,216 \times 10^{1}$; $b = 5,037 \times 10^{0}$; $c = 6,676 \times 10^{-1}$; $d = 8,323 \times 10^{-2}$. $b+c = 5,705\times10^{0} \to (b+c)+d = 5,788\times10^{0} \to a(b+c+d) = 1,861\times10^{2}$; $ab = 1,620 \times 10^{2}$, $ac = 2,147 \times 10^{1}$, $ad = 2,677 \times 10^{0}$; $ab + ac = 1,835 \times 10^{2} \to (ab+ac)+ad = 1,862\times10^{2}$, portanto $a((b+c)+d) \neq (ab+ac)+ad$.

d) $erro \leq \frac{1}{2}10^{e-t+1} = \frac{1}{2}10^{6-4+1} = 500$.

e) Não, pois $n(F) = 342001 < n(G) = 16200001$.

Q2.

a) Gráfico da interseção das curvas



b) $f(-0,3) = -0,132$ e $f(-0,2) = 0,227$, então $I = [-0,3; -0,2]$. Pelo Teorema de Bolzano:

i) $f(x)$ é contínua em $I = [-0,3; -0,2]$.

ii) $f(-0,3)f(-0,2) < 0$.

iii) $f'(x) = e^{x} - 3x^{2} + 3$. Observe que $f'(x) > 0 \ \forall\ x \in I$, pois $e^{x} > 0 \ \forall\ x$, e $-3x^{2} + 3 > 0 \ \forall\ x \in I$, portanto $f'(x)$ não muda de sinal em I.

c) Método das Cordas[1]

[1] A tabela a seguir usa mais casas decimais do que o solicitado na questão. Só são necessárias 4 casas decimais.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	δ_k
0	-0,3	-0,2	-0,13218178	0,226730753	-0,2632	-0,002778856	
1	-0,2632	-0,2	-0,00277886	0,226730753	-0,2624	0,000070508	0,0008
2	-0,2632	-0,2624	-0,00277886	0,000070508	-0,2624	0,000070508	0,0

portanto a raiz aproximada vale $x = -0,2624$.

d) O intervalo de separação vale $|b_2 - a_2| = 0,0008$, portanto $k > 6,97 \rightarrow n = 7$ iterações.