Universidade Federal de Pernambuco - CIn / CCEN - Área II
Exame Final de Cálculo Numérico (10 / 07 / 2012)

Aluno(a)____

Questão 1 (4,5 pontos) Responda verdadeiro ou falso para cada item abaixo, justificando sua resposta. Justificativa deve ser clara, objetiva e focada. Justificativa fora deste padrão não será considerada.

a) (1,0 pt) O sistema linear $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y - 7z = 4} \\ \mathbf{4x - 2y + z = 2} \\ \mathbf{3x + 6y - z = 1} \end{cases}$ é, ou pode ser transformado em um sistema linear equivalente, que seja diagonal estritamente dominante.

b) (1,5 pt) Seja *F(10, 3, -5, 5)* e arredondamento padrão, o volume da esfera de raio **r = 6,645** vale $\boldsymbol{1{,}23.10^3}$, onde $\mathbf{V = (4/3)[\pi(r^3)]}$.

c) (1,0 pt) O método da bisseção é inapropriado para se calcular a raiz aproximada de uma função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ (com $\boldsymbol{a \neq 0}$) que apenas tangencia o eixo x.

d) (1,0 pt) A função $\boldsymbol{P(x) = x^3 + 1}$ é interpoladora do tabelamento abaixo:

x_i	–1	0	1
$f(x_i)$	0	1	2

Questão 2 (2,0 pontos) A distribuição normal com média μ = 0 e variância unitária $\sigma^2 = 1$ é descrita por $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}}$. Sua integral sobre um intervalo *[a,b]* representa o valor de uma probabilidade. Utilizando uma tabela da distribuição normal, sabe-se que $\int_0^2 f(x)dx \cong 0{,}447$. Considere **três casas decimais** e **arredondamento padrão** para qualquer cálculo neste problema. Faça:

a) (1,0 pt) Calcule $\int_0^2 f(x)dx$ utilizando o **método de Simpson** e um tabelamento com 5 pontos.

b) (1,0 pt) Calcule o número de subintervalos necessários para que o erro de integração seja menor que 10^{-3} para o **método dos trapézios**.

Questão 3 (1,5 pontos) Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{\mathbf{10}}$ utilizando o método de **Newton-Raphson**. Considere **quatro casas decimais** e **arredondamento padrão**. Inicialize a partir de $\boldsymbol{x_0 = 2}$, faça 3 iterações ou pare se $\mathbf{|x_{i+1} - x_i| \leq 10^{-4}}$.

Questão 4 (2,0 pontos) Determine $\boldsymbol{P(x) = ae^{bx}}$ que melhor se ajuste à tabela abaixo, utilizando MMQ. Para isso, considere **quatro casas decimais** e **arredondamento padrão**.

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	3,0	1,1	0,4

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i)\, g_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i)\, f(x_i) \qquad j = 0, 1, \dots, m$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} ;$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad onde \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left[\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right] ;$$

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \qquad \int_a^b f(x)dx \cong h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$$

Gabarito

Questão 1

a) VERDADEIRO, $\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 4 \\ 4x - 2y + z = 2 \\ 3x + 6y - z = 1 \end{cases}$ *equivalente a* $\begin{cases} 4x - 2y + z = 2 \\ 3x + 6y - z = 1 \\ 2x + 3y - 7z = 4 \end{cases}$ → $|4| > |-2| + |1|$; $|6| > |3| + |-1|$; $|-7| > |2| + |3|$, *sistema diagonal estritamente dominante por linha*

b) *FALSO*, $r = 6{,}64 \,.\, 10^0$ e $\pi = 3{,}14.10^0$; → $r^2 = 4{,}41.10^1$; $r^3 = 2{,}93.10^2$; $\pi r^3 = 9{,}20 \,.\, 10^2$; $(4/3) = 1{,}33 \,.\, 10^0$; $(4/3)[\,\pi(r^3)] = \mathbf{1{,}22.10^3}$.

c) VERDADEIRO, o método da Bisseção avalia, a cada iteração, um novo intervalo de separação que contenha a raiz através da sentença $f(a)f(b) < 0$. Se a função apenas tangencia o *eixo x*, então sempre ocorrerá que $f(a)f(b) > 0$, o que inviabiliza o método da bisseção.

d) FALSO, um tabelamento com 3 pontos pode ter um polinômio interpolador de grau igual ou inferior a 2.

Questão 2

a) *5 pontos* → $n = 4$ → $h = (x_n - x_0)/n = (2 - 0)/4 = 0{,}5$;

x_i	0	0,5	1	1,5	2
$f(x_i)$	0,399	0,352	0,242	0,130	0,054

$$\int_0^2 f(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] = 0{,}478$$

b) $x_n - x_0 = 2$ → $h = 2/n$ → $\frac{8nh^3}{12} f''(0) < 10^{-3}$ → $n^2 > \frac{8}{12} f''(0) \times 10^3$ → $n > 16{,}3$ → $\mathbf{n = 17}$

Questão 3

$f(x) = x^3 - 10 = 0$ → $x_{i+1} = x_i - \frac{x^3 - 10}{3x^2}$

k	x^k	$\delta^k = \lvert x^{k+1} - x^k \rvert$
0	2,0000	0,1667
1	2,1667	0,0122
2	2,1545	0,0001
3	**2,1544**	

Questão 4

Aplicando *ln* na equação → $ln(P(x)) = ln(a) + bx$ → $a_0 = \ln(a)$, $a_1 = b$, $g_0(x) = 1$ e $g_1(x) = x$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2}[g_0(x_i)]^2 + a_1 \sum_{i=0}^{2} g_0(x_i)\, g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{2} g_0(x_i)\, f(x_i) \quad \rightarrow \quad 3\, a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i = \sum_{i=0}^{2} \ln(f(x_i))$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} g_0(x_i) g_1(x_i) + \sum_{i=0}^{2}[g_1(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{2} g_1(x_i)\, f(x_i) \quad \rightarrow \quad a_0 \sum_{i=0}^{2} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{2}(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{2} x_i \ln(f(x_i))$$

i	x_i	$(x_i)^2$	$Ln(f(x_i))$	$x_i*Ln(f(x_i))$
0	0	0	1,0986	0
1	1	1	0,0953	0,0953
2	2	4	-0,9163	-1,8326
Σ	3	5	0,2776	-1,7373

$\begin{cases} 3a_0 + 3a_1 = 0,2776 \\ 3a_0 + 5a_1 = -1,7373 \end{cases}$ → $a_1 = -1,0074 = b$ e $a_0 = 1,0999 = ln(a)$ → $a = e^{1,0999} = 3,0039$

$P(x) = 3,0039e^{-1,0074x}$