PROVA II - 16 de abril de 2013

UFPE - Área 2 Cálculo Numérico 2012.2

Questão 1 (1,5 pontos) - Analise cada afirmação abaixo entre VERDADEIRA ou FALSA, justificando sua escolha.

a) (0,5 pts.) O tabelamento mostrado abaixo, onde os x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$ são distintos, foi gerado com o polinômio $Q(x)$ de grau m. Em seguida, utilizando todos os pontos deste tabelamento, foi criado o polinômio interpolador $P(x)$. Então, $P(x) = Q(x)$ se e somente se, $m = n - 1$.

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$Q(x_i)$	$Q(x_0)$	$Q(x_1)$	$\cdots$	$Q(x_n)$

b) (1,0 pts.) Ao integrar numericamente uma função polinomial $f(x)$, o erro devido a integração numérica, será o mesmo para os métodos dos trapézios e de Simpson, se $f(x)$ tiver grau menor ou igual a 1.

Questão 2 (1,5 pontos) - Seja função $f(x) = e^{-x} - sen(x)$. Encontre, se existir, a raiz aproximada de $f(x)$ mais próxima da origem no primeiro quadrante, utilizando para isso, interpolação inversa com o **Polinômio Interpolador de Lagrange**. Considere um tabelamento com 3 pontos, utilizando quatro casas decimais de precisão e arredondamento padrão.

Questão 3 (4,0 pontos) - Calcule aproximadamente, a área da região no primeiro quadrante, delimitada pela interseção das curvas $g(x) = 4 - 2x$ e f, definida pelo tabelamento:

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	16	4	0	4	16

Para tal, usando 3 casas decimais e arredondamento padrão faça:

a) (2,0 pts.) Obtenha, usando todos os pontos do tabelamento, o polinômio interpolador $P(x)$, que aproxima a função f.

b) (1,0 pts.) Apresente um gráfico exibindo as curvas em questão, destacando a região solicitada, bem como os limites de integração.

c) (1,0 pts.) Escolha um método de integração numérica e, usando um tabelamento de 6 pontos, obtenha o valor aproximado da área solicitada.

Questão 4 (3,0 pontos) - Projeto

$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{n} g_k(x_i) g_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i) f(x_i)$, para $j = 0, 1, \cdots, n$.

$|E| \leq \frac{nh^3}{12} M_2, M_2 = max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f''(m)|$, $|E| \leq \frac{nh^5}{180} M_4, M_4 = max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f^{iv}(m)|$

$\int_a^b h(x)dx \approx h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$, $\int_a^b h(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[E + 4I + 2P\right]$

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \mathcal{L}_i(x)$ onde $\mathcal{L}_i(x) = \Pi_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Gabarito:

1a) Falso. Se $m = n-1$ então $P(x) = Q(x)$, mas se o tabelamento tiver n ou mesmo $n+1$ pontos, ainda assim, pelo teorema da existência e unicidade, $P(x) = Q(x)$. De fato, $P(x) = Q(x)$ desde que $m \geq n-1$. Outra maneira de justificar é mostrar um contra-exemplo.

1b) Verdadeiro, os erros de integração pelos métodos dos trapézios e de Simpson, depedem respectivamente, da segunda e da quarta derivada de f. Caso f seja um polinômio de grau menor ou igual a 1, tanto a segunda quanto a quarta derivada serão nulas, e portanto os respectivos erros de integração serão iguais e nulos.

2) Como $f(x)$ é contínua em I, e $f(0)f(1) < 0$ pois $f(0) = 1$ e $f(1) = -0,4736$ então, pelo Teorema de Bolzano, existe ao menos uma raiz em $I = [0;1]$. Observa-se que $f'(x) = -e^{-x} - cos(x)$ é negativa em I pois $cos(x) > 0, \ \forall \ x \in [0, \pi/2]$, consequentemente f é decrescente em I. Logo existe um única raiz em I.

Considere três pontos dentro do intervalo I, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 1$ para construir a tabela

x_i	0	0,5	1
$f(x_i)$	1	0,1271	-0,4736

Que dever ser invertida, de forma que $x \to f(x)$ e $f(x) \to x$. O polinômio interpolador de Lagrange será:

x_i	1	0,1271	-0,4736
$f(x_i)$	0	0,5	1

$P(x) = f(x_0)\mathcal{L}_0(x) + f(x_1)\mathcal{L}_1(x) + f(x_2)\mathcal{L}_2(x)$

$P(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \times \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \times \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2)\frac{x-x_0}{x_2-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$P(x=0)$ será o valor aproximado da raiz de f.

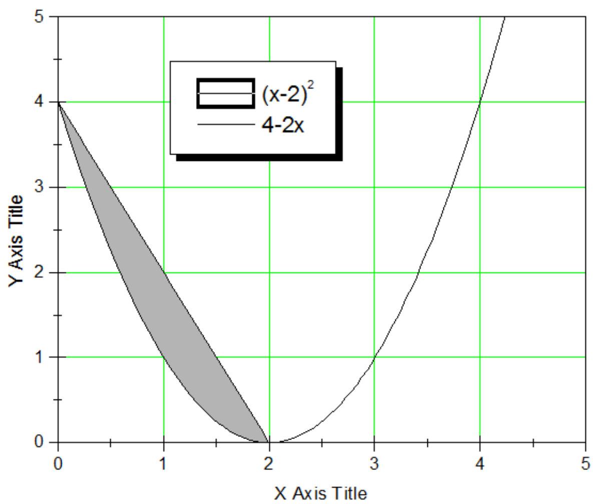
$P(0) = \frac{f(x_0)x_1x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)x_0x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)x_1x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 0 + 0,4516 + 0,1436 = 0,5952$

3a) $P(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4}$

$P(x) = 16 + (x+2) \times \frac{-12}{1!2^1} + (x+2)(x-0) \times \frac{8}{2!2^2} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

i	x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
0	-2	16	-12	+8	0	0
1	0	4	-4	+8	0	0
2	2	0	+4	+8		
3	4	4	+12			
4	6	16				

3b) Os limites de integração são encontados pela interseção das funções f e $g \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$. Portanto os limites de integração são os pontos $x = 0$ e $x = 2$.



3c) Um tabelamento com 6 pontos só permite utilizar o método dos trapézios. O parâmetro h é dado por: $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{2-0}{5} = 0,4$. A função a ser integrada vale $h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 2x$

x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$f(x_i)$	0	0,64	0,96	0,96	0,64	0

$\int_0^2 h(x)dx \approx h\left[\frac{E}{2} + I + P\right] = 1,28$