**Universidade Federal de Pernambuco – CIn / CCEN - Área II**
**Segundo Exercício Escolar Cálculo Numérico – ( 28 / 06 / 2012 )**

**Aluno(a)**________________________________________________________________

**Questão 1** (0,5 pt) Sabendo que o polinômio interpolador do tabelamento abaixo vale $P(x) = x^2 - 1$, então é verdade que $P(2) = 3$? Justifique sua resposta.

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

**Questão 2** (4,0 pontos) **-** Calcule, aproximadamente, a área da região situada no primeiro quadrante, delimitada pela interseção entre as curvas $g(x) = -2x + 4$ e a função $f$, definida pelo tabelamento:

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $8$ | $0$ | $0$ | $2$ | $-12$ |

Para tal, usando três casas decimais e arredondamento padrão,

a) (2,0 pts) Obtenha, usando todos os pontos do tabelamento, o polinômio interpolador de Newton $P(x)$, que aproxima a função $f$.
b) (1,0 pts) Apresente um gráfico exibindo as curvas em questão, destacando a região solicitada, bem como os limites de integração.
c) (1,0 pts) Escolha um método de integração numérica e, usando um tabelamento de 6 pontos, obtenha o valor aproximado da área solicitada.

**Questão 3** (1,0 ponto) Determine o **menor número de subintervalos** para que, usando o **método de Simpson**, tenha-se certeza de um erro menor que $10^{-4}$, para $\int_0^1 \left[e^x + \frac{x^5}{5}\right] dx$.

**Questão 4** (1,5 ponto) Utilize **interpolação inversa** sobre o tabelamento abaixo para calcular a raiz aproximada de $f$. Considere três casas decimais e arredondamento padrão.

| $x_i$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $-0{,}2$ | $0{,}4$ | $1{,}0$ |

**Questão 5 -** Projeto. ( 3,0 pontos )

---

$$|E| \leq \frac{nh^3}{12} M_2,\ M_2 = max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f''(m)| \qquad |E| \leq \frac{nh^5}{180} M_4,\ M_4 = max_{x_0 \leq m \leq x_n} \left|f^{(iv)}(m)\right|$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \qquad \int_a^b f(x)dx \cong h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$$

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

**Gabarito**

**Questão 1** - Falso, o polinômio interpolador *P(x)* tem seu domínio restrito à região [-1; 1].

**Questão 2**

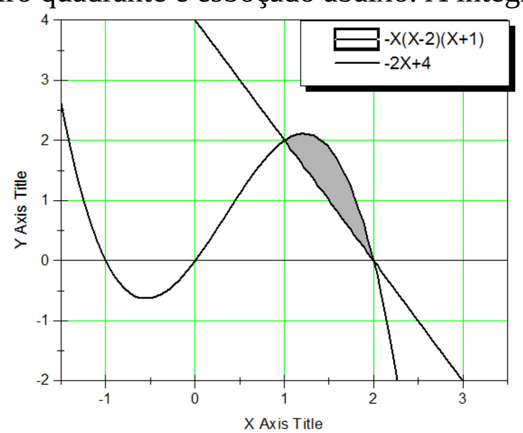
a) Calculando o polinômio interpolador de Newton

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(x_i, x_{i+1})$ | $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ | $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$ | $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+3})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -2 | 8 | 8 | 4 | -1 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | |
| 2 | 0 | 0 | 2 | -3 | | |
| 3 | 1 | 2 | -7 | | | |
| 4 | 3 | -12 | | | | |

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$P(x) = - x(x + 1)(x - 2) = -x^3 + x^2 + 2x$

**b)** A interseção das curvas no primeiro quadrante é esboçado abaixo. A integração se dará no intervalo [*1; 2*].




$- x(x + 1)(x - 2) = 2(x-2) \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow$ *raízes* $x = 1$ *ou* $x = -3 \rightarrow x = 1$ é um dos pontos de interseção entre as curvas.

c) O tabelamento a seguir possui 6 pontos para $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0{,}2$.

| $x_i$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert L(x)\rvert = \lvert f(x) - g(x)\rvert$ | 0,0 | 0,512 | 0,816 | 0,864 | 0,608 | 0,0 |

$\text{Área} = \int_1^2 \mathrm{L(x)dx} \cong \mathrm{h[E/2 + I + P]} = 0{,}56$

**Questão 3**

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \quad f^{iv}(x) = e^x + 24x \rightarrow f^{iv}(1) = 26{,}718 \rightarrow$

$T = \frac{nh^5}{180}\left|f^{iv}(1)\right| = \frac{n}{180n^5}\left|f^{iv}(1)\right| < 10^{-4} \rightarrow n^4 > \frac{26{,}718}{180}10^4 \rightarrow$ n > 6,2 $\rightarrow n = 7$. Mas como $n = 7$ resulta em um tabelamento de 8 pontos, $n = 8$ para que o método de Simpson possa ser utilizado.

**Questão 4**

Calculando o polinômio interpolador de Newton

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(x_i, x_{i+1})$ | $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -0,2 | 1 | 3,333 | 0 |
| 1 | 0,4 | 3 | 3,333 | |
| 2 | 1,0 | 5 | | |

$$P(x) = 1 + 3{,}333.(x + 0{,}2) + 0.(x + 0{,}2)(x - 0{,}4) \rightarrow P(0) = 1{,}667 \rightarrow x = 1{,}667$$