Universidade Federal de Pernambuco
CIn / CCEN - Área II
1º Exercício de Cálculo Numérico (17 / 05 / 2012)

Aluno(a)____

Questão 1 (3,0 pontos) Seja a máquina *F(10, 3, -5, 5)* e o arredondamento padrão:

a) Utilizando *números da máquina F*, dê **dois exemplos** de operações básicas (adição, subtração ou multiplicação) tal que: uma operação resulte em underflow; a outra operação resulte em overflow. (1,0pt)

b) Sejam *a = 87,45* e *b = 3,515*, verifique se $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2(ab)$. Execute as operações da esquerda para a direita. (1,5pt)

c) Se *x* é um número real tal que *x* = 3 □ □ □ □,□ onde "□" significa um algarismo qualquer de 0 a 9, qual é o erro *máximo* devido ao arredondamento de *x* ? (0,5pt)

Questão 2 (3,5 pontos) Seja: $f(x) = \text{sen}(2x) - \ln(x-1)$

a) Localize graficamente, se existir, o zero da função *f mais próximo da origem*, onde *x > 1.* (1,0pt)

b) A seguir, analiticamente, determine um intervalo de separação de amplitude 0,1 contendo o zero da função *f*. (1,0pt)

c) A partir do ponto médio deste intervalo, use o método de Newton-Raphson para calculá-la. Faça iterações até que $|x_{i+1} - x_i| \leq 10^{-3}$. Caso essa condição não seja satisfeita após *i* = 3 iterações, pare. **Trabalhe com 4 decimais, e o arredondamento padrão**. (1,5pt)

Questão 3 (3,5 pontos) Seja o seguinte tabelamento:

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(x_i)$	-0,5	1,414	0,626	0,333

a) Encontre, utilizando MMQ, a melhor função de ajuste para $P(x) = \frac{1}{a sen(x) + b cos(x)}$ (2,0 pt)

b) Resolva o sistema linear da seguinte forma (1,5 pt):
   a. Caso ele seja diagonal estritamente dominante, *mostre* que isto ocorre, use o método iterativo de Gauss-Seidel para resolvê-lo. Inicialize do vetor nulo e faça 3 iterações.
   b. Caso o contrário, resolva o sistema utilizando o método de eliminação de Gauss com pivotação parcial.

Em qualquer dos casos, considere o **arredondamento padrão** e **três casas decimais de precisão**.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i)\, g_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g_j(x_i)\, f(x_i) \qquad j = 0, 1, \dots, m$$

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii})\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii})\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gabarito

Questão 1

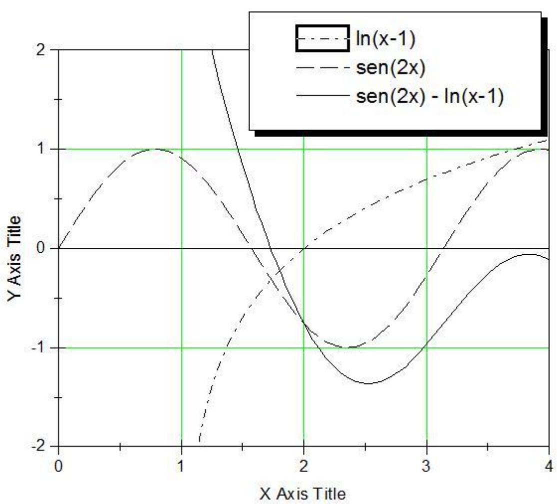
a) As operações válidas devem resultar na região de operação da máquina. As regiões onde a máquina não opera são chamadas de overflow e underflow:
Overflow : $\{x > X_{max}\}\ U\ \{x < -X_{max}\}$ *Underflow:* $\{-X_{min} < x < 0\}\ U\ \{0 < x < X_{min}\}$
$X_{min} = 1{,}00.10^{-5}$ e $X_{max} = 9{,}99 \,.\, 10^{5}$.
$x_1 = 6{,}02 \,.\, 10^4$ e $x_2 = 2{,}00 \,.\, 10^4$ → $x_1 x_2 = 1{,}20 \,.\, 10^8$ → região de overflow
$x_1 = 6{,}02 \,.\, 10^{-4}$ e $x_2 = 6{,}00 \,.\, 10^{-4}$ → $x_1 - x_2 = 2{,}00 \,.\, 10^{-6}$ → região de underflow

b) $a = 8{,}74.10^1$, $b = 3{,}52.10^0$ → $(a - b)^2 = 7{,}04.10^3$; $a^2 = 7{,}64.10^3$; $b^2 = 1{,}24.10^1$;
$2(ab) = 6{,}16.10^2$; $a^2 + b^2 - 2(ab) = 7{,}03.10^3$.

c) $\text{erro}_{max} = ½\, b^{e-t+1} = ½\, 10^{4-3+1} = 500$

Questão 2

Letra a)



letra b)
I = [1,7; 1,8]
Teorema de Bolzano:

i. $f(1{,}7) = 0{,}101$; $f(1{,}8) = -0{,}219$; →
$f(1{,}7) \times f(1{,}8) < 0$

ii. $f(x)$ é contínua em I.

iii. $f'(x) = 2\cos(2x) - 1/(x-1)$

No intervalo *I*, as funções $2\cos(2x)$ e $-1/(x-1)$ são monótonas, portanto, os valores da imagem nos extremos do intervalo *I* trazem o maior e o menor valor da função naquele intervalo. A imagem de $2\cos(2x)$ está no intervalo *[-1,935; -1,794]* enquanto a imagem de $-1/(x-1)$ está no intervalo *[-1,25; -1,429]*. A soma de qualquer valor retirado destes intervalos é um número negativo, portanto $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

letra c)

k	x^k	$\delta^k = \lvert x^{k+1} - x^k \rvert$
0	1,7500	0,0197
1	1,7303	0,0002
2	1,7305	

Parou pois atingiu o erro mínimo

Questão 3

É necessário fazer a transformação $P'(x) = 1/P(x)$ → $f'(x) = 1/f(x)$
$P'(x) = a\,sen(x) + b\cos(x)$ → $g_0(x) = sen(x)$ e $g_1(x) = \cos(x)$,

<u>j = 0:</u>

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_0(x_i) \; + \; a_1 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i) \ln\left(f'(x_i)\right)$$

$$a \sum_{i=0}^{3} [sen(x_i)]^2 \; + \; b \sum_{i=0}^{3} sen(x_i) cos(x_i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{sen(x_i)}{f(x_i)}$$

j=1:

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_1(x_i) \; + \; a_1 \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i)\, g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i) \ln\left(f'(x_i)\right)$$

$$a \sum_{i=0}^{3} sen(x_i) cos(x_i) \; + \; b \sum_{i=0}^{3} [cos(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{3} \frac{cos(x_i)}{f(x_i)}$$

i	x_i	$1/f(x_i)$	$sen(x_i)$	$cos(x_i)$	$[sen(x_i)]^2$	$[cos(x_i)]^2$	$sen(x_i)cos(x_i)$	$sen(x_i) / f(x_i)$	$cos(x_i) / f(x_i)$
0	0	-2	0	1	0	1	0	0	-2
1	π/4	0,707	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	π/3	1,598	0,866	0,5	0,75	0,25	0,433	1,384	0,799
3	π/2	3,003	1	0	1	0	0	3,003	0
Σ	-				2,25	1,75	0,933	4,887	-0,701

$$\begin{cases} 2{,}25a \; + 0{,}993b = 4{,}887 \\ 0{,}993a \; + 1{,}75b = -0{,}701 \end{cases}$$

o sistema é diagonal estritamente por linha pois |2,25| > |0,993| e |1,75| > |0,993|

$$\begin{cases} a^{k+1} = \quad (4{,}887 - 0{,}993b^k)/2{,}25 \\ b^{k+1} = (-0{,}701 - 0{,}993a^{k+1})/1{,}75 \end{cases}$$

k	a^k	b^k
0	0	0
1	2,172	-1,559
2	2,818	-1,903
3	2,961	-1,955

$$P(x) = \frac{1}{2{,}961 sen(x) - 1{,}955 \cos(x)}$$