Universidade Federal de Pernambuco - CIn / CCEN - Área II
Exame Final de Cálculo Numérico (20 / 12 / 2011)

Aluno(a)____

Questão 1 (2,0 pontos) – Seja a máquina *F(10, 5, -9, 9)* e o arredondamento padrão. Responda cada item justificando sua resposta:

a) Sejam ainda os números reais a = 127,345 e b = 127,355. Então $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2(ab)$? Execute as operações na máquina F, da esquerda para direita. (1,0 pt)

b) A máquina *G(10, 6, -8, 8)* possui mais números com representação exata do que a máquina F ? (1,0 pt)

Questão 2 (3,0 pontos) – Sejam as funções: $\boldsymbol{g(x) = e^{-x}}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(x)}$

a) Apresente um gráfico exibindo as curvas $g(x)$ e $h(x)$. Localize graficamente a **<u>menor raiz real positiva</u>** de $f(x) = g(x) - h(x)$. (1,0 pt)

b) Determine analiticamente um **<u>intervalo de separação</u>** de amplitude 0,1 contendo tal raiz. (1,0pt)

c) A partir do ponto médio deste intervalo, use o método de Newton para calcular o valor aproximado da raiz nele contida. Faça iterações até que $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-3}$. Caso essa condição não seja satisfeita após 3 iterações, pare. Trabalhe com **4 casas decimais**, e o arredondamento padrão.

Questão 3 (2,0 pontos) – Para o tabelamento abaixo, usando **3 casas decimais** e arredondamento padrão:

x_i	0	0,5	1,0	2
$f(x_i)$	0	1,875	3	0

a) Obtenha, usando todos os pontos do tabelamento, o polinômio interpolador que se ajusta a esses dados. Para encontrar o polinômio interpolador, escolha um dos seguintes métodos (desde que o método escolhido possa ser usado no problema): Lagrange, Newton ou Gregory-Newton. (1,0 pt)

b) Calcule a área sob a curva do polinômio interpolador encontrado no item anterior, pelo método de Simpson, para o intervalo [0; 2]. Utilize todos os pontos do tabelamento e, caso seja necessário, <u>acrescente</u> mais ponto(s) de forma que seja possível utilizar o método de Simpson. (1,0 pt)

Questão 4 (3,0 pontos) – Seja o sistema de equações lineares a seguir:

$$\begin{cases} 7x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução deste sistema. Se necessário aplique operações básicas ao sistema (que não alterem a solução do mesmo, como troca de linhas ou colunas). (1,0 pt)

b) Partindo da configuração do sistema previamente demonstrada como convergente, aplique o método de Gauss-Seidel para encontrar, aproximadamente, o vetor solução do sistema. Parta do vetor nulo, use 3 casas decimais e o arredondamento padrão. Faça iterações até que $\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le 10^{-2}$. Caso isso não ocorra até 3 iterações, pare. (2,0 pt)

Dados:

$|T_t| \le \frac{nh^3}{12} M_2,\ M_2 = max_{x_0 \le m \le x_n} |f''(m)|$ $\qquad$ $|T_s| \le \frac{nh^5}{180} M_4,\ M_4 = max_{x_0 \le m \le x_n} \left|f^{iv}(m)\right|$

$\int_a^b f(x)dx \cong h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$ $\qquad$ $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$

Gabarito

Questão 1

a)

$a = 1{,}2734 \times 10^2$, $b = 1{,}2736 \times 10^2$,

$a - b = -0{,}0002 \times 10^2 = -2{,}0000 \times 10^{-2}$

$(a - b)^2 = 4{,}0000 \times 10^{-4}$

$a^2 = 1{,}6215 \times 10^4$

$b^2 = 1{,}6221 \times 10^4$

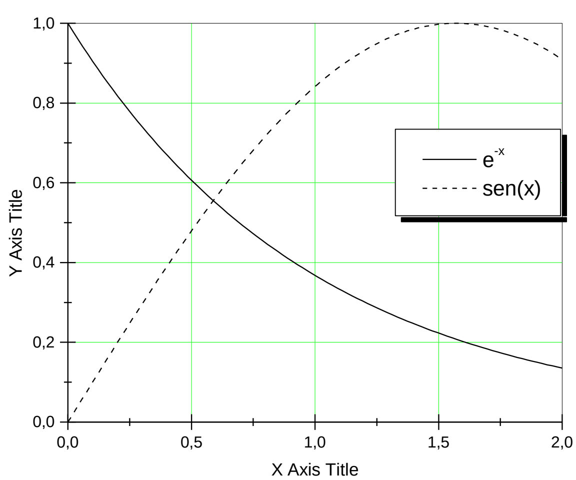
$ab = 1{,}6218 \times 10^4 \rightarrow 2(ab) = 3{,}2436 \times 10^4$

$a^2 + b^2 - 2(ab) = 0{,}0000 \times 10^{-9}$

b) Sim $\rightarrow$ N (F) = 3420001 < N(G) = 30600001

Questão 2

a)



b)

$f(x) = e^{-x} - sen(x)$

$f'(x) = -e^{-x} - cos(x)$

I = [0,5; 0,6]

$\rightarrow f(0{,}5) = 0{,}12$

$\rightarrow f(0{,}6) = -0{,}015$

$\rightarrow f(0{,}5).f(0{,}6) < 0$

$f'(x)$ não muda de sinal no intervalo [0,5;0,6] pois $-cos(x)$ não muda de sinal assim como $-e^{-x}$.

c)

$f(x) = e^{-x} - sen(x)$

$f'(x) = -e^{-x} - cos(x)$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k) \qquad \rightarrow x_0 = 0{,}55$$

k	x_k	$\delta_k = \lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,55	0,0380
1	0,5880	0,0005
2	0,5885	$< 1 \times 10^{-4}$
3	0,5885	

Questão 3

a) Calculando o polinômio interpolador de Newton

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	0,0	0	3,75	-1,5	-1,0
1	0,5	1,875	2,25	-3,5	
2	1,0	3	-3		
3	2,0	0			

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$P(x) = -x^3 + 4x$

b) Para poder utilizar o método de Simpson, é necessário adicionar um ponto ao tabelamento:

x_i	0	0,5	1,0	**1,5**	2
$f(x_i)$	0	1,875	3	**2,625**	0

$$\text{Área} = \int_{0,0}^{2,0} \mathrm{f(x)dx} \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$$

$E = f(x_0) + f(x_4) = 0,0, \quad P = f(x_2) = 3,0 \qquad I = f(x_1) + f(x_3) = 4,5 \quad e \quad h = 0,5$

Área = 4,000 u.a.

Questão 4

a) O sistema a seguir é diagonal estritamente dominante por linha, portanto, sua convergência é garantida para o método iterativo de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 7x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10 \end{cases}$$

b) O sistema iterativo será:

$$x_1^{k+1} = \frac{7 - 2x_2^k + x_3^k}{5}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{7x_1^{k+1} + 2x_3^k}{10}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{-10 + 3x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}}{6}$$

x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\lvert x_1^{k+1} - x_1^k \rvert$	$\lvert x_2^{k+1} - x_2^k \rvert$	$\lvert x_3^{k+1} - x_3^k \rvert$
0,0	0,0	0,0	1,4	0,98	0,64
1,4	0,98	-0,64	0,52	0,532	0,424
0,88	0,488	-1,064	0,112	0,034	0,054
0,992	0,482	-1,010			