Universidade Federal de Pernambuco
– CIn / CCEN - Área II
Segundo Exercício Escolar Cálculo Numérico – (01 / 12 / 201)

Aluno(a)____

Questão 1 – Responda **verdadeiro** ou **falso** para cada item abaixo, **justificando sua resposta**.

a) De um polinômio $P(x)$ obtém o tabelamento abaixo. Portanto, utilizando o método de Newton-Cotes, o valor de $\int_{x_0}^{x_n} P(x)dx$ é exato. (0,5 ponto)

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$P(x_i)$	$P(x_0)$	$P(x_1)$	...	$P(x_n)$

b) Dado um conjunto de "n" pontos $(x_i, f(x_i))$ onde $i = 0, 1, ..., n-1$, o polinômio interpolador relativo a esses pontos é de grau "$n - 1$". (0,5 ponto)

Questão 2 – Considerando a função $f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - e^{-x}$.

a) Mostre que é possível calcular aproximadamente a raiz de f(x) contida no intervalo [1,1; 1,25] usando interpolação inversa. (0,5 ponto)

b) Considerando 4 pontos do intervalo [1,1; 1,25], calcule a raiz de $f(x)$ contida nele, usando quatro casas decimais (inclusive para π) e o arredondamento padrão. (1,5 ponto)

Questão 3 - Calcule, aproximadamente, a área da região situada no primeiro quadrante, delimitada pela interseção entre as curvas $g(x) = x^3$ e a função f, definida pelo tabelamento:

x_i	–2,5	1,0	2,0	2,5
$f(x_i)$	1,25	3,0	8,0	11,25

Para tal, usando três casas decimais e arredondamento padrão,

a) Obtenha, usando todos os pontos do tabelamento, o polinômio interpolador P, que aproxima a função f. (1,0 ponto)

b) Apresente um gráfico exibindo as curvas em questão, a região solicitada, bem como os limites de integração. (1,0 ponto)

c) Obtenha, usando um método de Simpson com 5 pontos do intervalo de integração, o valor aproximado da área solicitada. (1,0 ponto)

d) Determine qual o menor número de subintervalos deve ser considerado para que, usando o método dos trapézios, tenha-se certeza de um erro menor que 10^{-6}. (1,0 ponto)

Questão 4 - Projeto. (3,0 pontos)

Dados:

$$|T_t| \leq \frac{nh^3}{12} M_2, \ M_2 = max_{x_0 \leq m \leq x_n} |f''(m)|$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$$

Gabarito

Questão 1

a) Falso, depende do grau de $P(x)$ e do valor de n.

b) Falso. O polinômio interpolador terá grau menor ou igual a $n-1$.

Questão 2

a) $f'(x) = -\frac{\pi}{3} sen\left(\frac{\pi x}{3}\right) + e^{-x}$. Para o intervalo [1,1; 1,25], $-\frac{\pi}{3} sen\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ decresce e sua imagem está no intervalo [-1,02; -0,956], enquanto e^{-x} também decresce, e sua imagem está no intervalo [0,286; 0,333]. Para todo $x \in$ [1,1; 1,25] ocorrerá que $e^{-x} < \left|\left(\frac{\pi}{3}\right) sen\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right|$, de forma que $f'(x)$ será sempre negativa em [1,1; 1,25]. Como $f'(x)$ não troca de sinal, isso garante que: i) há uma única raiz e ii) $f(x)$ é inversível no intervalo [1,1; 1,25].

b)

x_i	1,1	1,15	1,2	1,25
$f(x_i)$	0,0739	0,0417	0,0078	-0,0277

Invertendo,

$x_i = f(x_i)$	0,0739	0,0417	0,0078	-0,0277
$f(x_i) = x_i$	1,1	1,15	1,2	1,25

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	0,0739	1,1	-1,5528	-1,1785	-2,1821
1	0,0417	1,15	-1,4749	-0,9568	
2	0,0078	1,20	-1,4085		
3	-0,0277	1,25			

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$P(0) = 1,1 + 0,0739 \times 1,5528 - 0,0739 \times 0,0417 \times 1,1785 + 0,0739 \times 0,0417 \times 0,0078 \times 2,1821$

$P(0) = 1,2112 \rightarrow f(1,2112) \approx -10^{-6} \rightarrow x = 1,2112$ é a raiz aproximada de $f(x)$ no intervalo [1,1; 1,25]

Questão 3

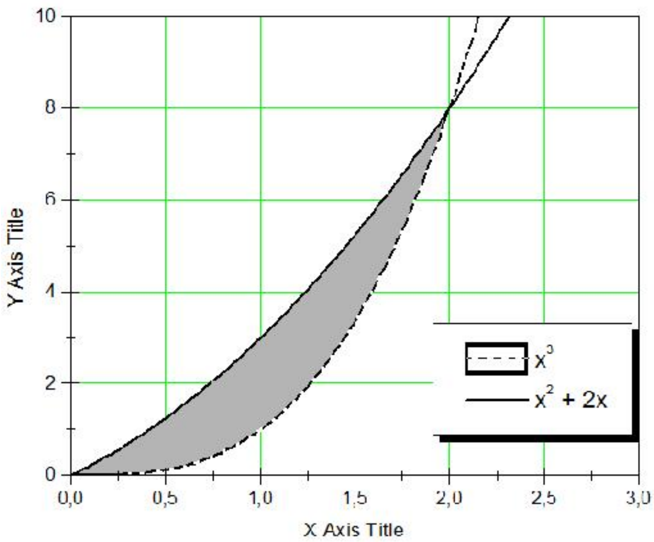
a) Calculando o polinômio interpolador de Newton

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	-2,5	1,25	0,5	1,0	0,0
1	1,0	3,00	5,0	1,0	
2	2,0	8,00	6,5		
3	2,5	11,25			

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$P(x) = x^2 + 2x$

b) A interseção das curvas no primeiro quadrante é esboçado abaixo. A integração se dará no intervalo [*0,0; 2,0*].



c) O tabelamento a seguir possui 5 pontos para $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$.

x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$L(x) = f(x) - g(x)$	0,0	1,125	2,0	1,875	0,0

$\text{Área} = \int_{0,0}^{2,0} L(x)dx \cong \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$ onde $L(x) = -x^3 + x^2 + 2x$

$E = L(x_0) + L(x_4) = 0{,}0$ $\quad P = L(x_2) = 2{,}0$ $\quad I = L(x_1) + L(x_3) = 3{,}0$

Área = 2,667 u.a.

d) $L'(x) = 2x - 3x^2 + 2 \rightarrow L''(x) = 2 - 6x \rightarrow |L''(2)| = 10$

$$\frac{nh^3}{12}|L''(2)| < 10^{-6} \; como\; h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow n > 2581{,}989 \Rightarrow n = 2582$$