Universidade Federal de Pernambuco
CIn / CCEN - Área II
1º Exercício de Cálculo Numérico (20 / 10 / 2011)

Aluno(a)____

Questão1 (2,5 pontos) Seja a máquina F(10, 4, -5, 5) e o arredondamento padrão:

a) Quantos números têm representação nesta máquina? (0,5pt)
b) Qual a representação interna do número zero? (0,25pt)
c) Seja x um número real representável nesta máquina, a que conjunto x pertence? (0,75pt)
d) Sejam

$$S_1 = 42450 + \sum_{i=1}^{4} 3 \qquad e \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{4} 3 + 42450$$

Então $S_1 = S_2$? Explique sobre o resultado obtido. (1,00pt)

Questão 2(3,0 pontos)Seja

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x(lnx - 1)$$

a) Localize graficamente, se existir, o zero da função f' (derivada de f). (0,5pt)
b) A seguir, analiticamente, determine um intervalo de separação de amplitude 0,1 contendo o zero da função f'. (0,5pt)
c) A partir do ponto médio deste intervalo, use o método de Newton-Raphson para calcular o zero da função f'.Faça iterações até que $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-3}$.Caso essa condição não seja satisfeita após $k = 2$ (isto é, 3 iterações), pare. Trabalhe com 4 decimais, e o arredondamento padrão. (1,5pt)
d) Considerando a busca pela raiz de uma função, qual é o papel do intervalo de separação? (0,5pt).

Questão 3(2,0 pontos)Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Determine o valor aproximado do vetor solução dele, usando o método iterativo de Gauss-Seidel, partindo do vetor nulo e usando 3 casas decimais. Pare quando:$max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 5.10^{-2}$ ou quando k = 1 (duas iterações), o que ocorrer primeiro. Utilize 4 casas decimais e arredondamento padrão. (2,00pt)

Questão 4(2,5 pontos) Suponha que a tabela de pontos abaixo seja modelada por uma função de ajuste exponencial na forma:$P(x) = ae^{bx}$. Usando o MMQ (método dos mínimos quadrados) calcule a estimativa para$x = 6$. O sistema normal resultante deve ser resolvido pelo método de eliminação de Gauss-Jordan.

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	4	9	16	25	?

Sistema Normal: $\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} g_k(x_i)g_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g_j(x_i)$ $\qquad j = 0, ..., m$

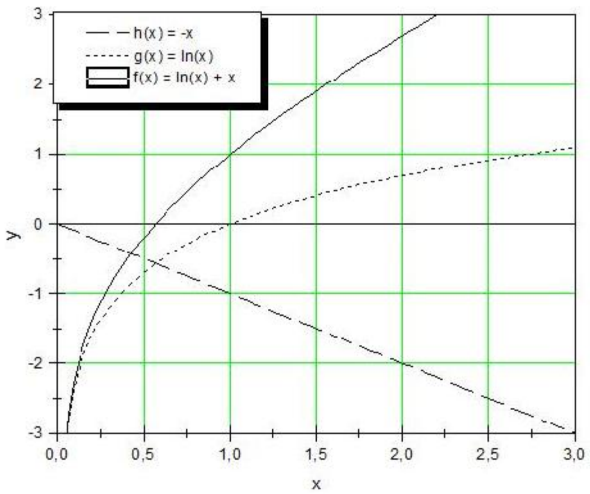
Gabarito

Questão 1

a) Nº de elementos= 2 x 9 x 10 x 10 x 10 x (1 + 5 – (–5)) + 1= 198001
b) $0{,}000 \times 10^{-5}$
c) $x \in C = [-x_{max}, -x_{min}] \cup \{0\} \cup [x_{max}, x_{min}]$, onde $x_{max} = 9{,}999 \times 10^{5}$ e $x_{min} = 1{,}000 \times 10^{-5}$
d) $S_1 = 4{,}245 \times 10^4$ e $S_2 = 4{,}246 \times 10^4$

Questão 2

Letra a)



letra b)

$L(x) = f'(x) = \ln(x) + x \rightarrow L(0{,}5) = -0{,}19$ e $L(0{,}6) = 0{,}089 \rightarrow L(0{,}5).L(0{,}6) < 0$

$\rightarrow I = [0{,}5; 0{,}6]$

$L'(x) = 1/x + 1$ não muda de sinal em I.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{L(x_k)}{L'(x_k)}$$

letra c)

$K+1$	x^k	$\delta^k = \lvert x^{k+1} - x^k \rvert$
0	0,55	-
1	0,5700	0,0200
2	0,5671	0,0029
3	0,5671	0,0000

Letra d)

O intervalo de separação I é escolhido de forma a garantir que ele contenha uma única raiz da função. Para isso, seu comprimento deve ser pequeno, e a derivada da função dentro do intervalo I, não deve mudar de sinal, ou seja, ou ela é sempre crescente, ou sempre decrescente dentro de I.

Questão 3

$$x_1^{k+1} = (5 - x_2^k - x_3^k)/5$$
$$x_2^{k+1} = (6 - 3x_1^{k+1} - x_3^k)/6$$
$$x_3^{k+1} = -(3x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1})/6$$
$$\delta_i^k = \lvert x_i^{k+1} - x_i^k \rvert$$

$K+1$	x_1^k	x_2^k	x_3^k	δ_1^k	δ_2^k	δ_3^k
0	0	0	0	-	-	-
1	1,0000	0,5000	-0,6667	1,0000	0,5000	0,6667
2	1,0333	0,5945	-0,7148	0,0333	0,0945	0,0481

Critério de parada foi o número de iterações

Questão 4

$\ln(P(x)) = \ln(a) + bx \rightarrow a_0 = ln(a),\ g_0(x) = 1 \quad e \quad a_1 = b,\ g_1(x) = x$

j = 0:

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_0(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i) \ln(f(x_i))$$

$$4a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i = \sum_{i=0}^{3} \ln(f(x_i))$$

j=1:

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} g_0(x_i)\, g_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i)\, g_1(x_i) = \sum_{i=0}^{3} g_1(x_i) \ln(f(x_i))$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{3} (x_i)^2 = \sum_{i=0}^{3} x_i \ln(f(x_i))$$

i	x_i	$ln(f(x_i))$	$(x_i)^2$	$x_i ln(f(x_i))$
0	2	1,386	4	2,772
1	3	2,197	9	6,591
2	4	2,773	16	11,092
3	5	3,219	25	16,095
Σ	14	9,575	54	36,550

$\sum_{i=0}^{3} x_i = 14, \sum_{i=0}^{3} (x_i)^2 = 54, \quad \sum_{i=0}^{3} \ln(f(x_i)) = 9,575, \quad \sum_{i=0}^{3} x_i \ln(f(x_i)) = 36,550$

$\begin{cases} 4a_0 + 14a_1 = 9,575 \\ 14a_0 + 54a_1 = 36,550 \end{cases}$ o sistema não é estritamente dominante, nem por linha nem por coluna.

$\begin{matrix} 4 & 14 & 9,575 \\ 14 & 54 & 36,550 \end{matrix}$ L2 → L2 – (14/4)L1

$\begin{matrix} 4 & 14 & 9,575 \\ 0 & 5 & 3,038 \end{matrix}$ L1 → L1/4 eL2 → L2/5

$\begin{matrix} 1 & 3,5 & 2,394 \\ 0 & 1 & 0,608 \end{matrix}$ L1 → L1 – 3,5L2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,266 \\ 0 & 1 & 0,608 \end{matrix}$$

$a_0 = 0,266 = \ln a \rightarrow a = e^{a0} = 1,305 a_1 = 0,608 = b \rightarrow P(x) = 1,305e^{0,608x} \rightarrow P(6) = 50,109$